تساوي زوجين مرتبين

الزوج المرتب :

يسمي (أ ، ب) زوجاً مرتباً ،ويُسمي أ بالمسقط الأول ، ب بالمسقط الثاني .

ملاحظات هامة :

❶ في **المجموعات** لا يمكن تكرار العناصر ، بينما في **الزوج المرتب** يمكن تكرار العنصر

❷ في **المجموعات** توجد مجموعة خالية ∅ ، بينما لا يوجد **زوج مرتب** خال

❸ {أ ، ب} = {ب ، أ} **بينما** (أ ، ب) ≠ (ب ، أ)

❹ كل **زوج مرتب** يمثل بنقطة واحدة فقط في المستوي الإحداثي

تساوي زوجين مرتبين : **إذا كان : (أ ، ب) = (س ، ص) فإن : أ = س ، ب = ص**

فمثلاً : **إذا كان : (أ ، ب) = (٥ ، ٩) فإن : أ = ٥ ، ب = ٩**

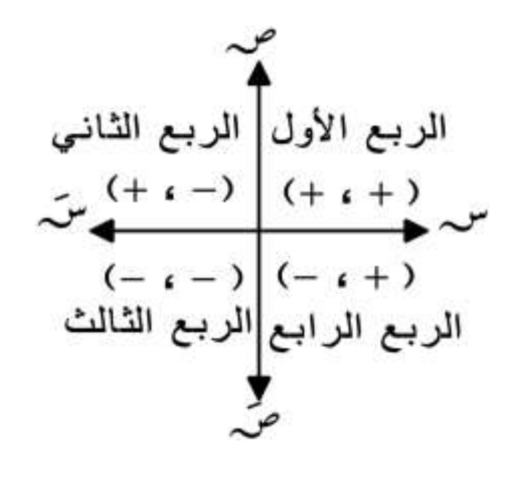
مثال ١ : في كل مما يأتي أوجد قيم أ ، ب إذا كان :

① (أ − ٢ ، ٣) = (٥ ، ب + ٢) **(الحل)** أ − ٢ = ٥ ، ب + ٢ = ٣ أ = ٥ + ٢ ، ب = ٣ − ٢ **أ = ٧** ، **ب = ١**	② (أ^{٣} ، ب^{٢} + ٣) = (−٨ ، ٧) **(الحل)** أ^{٣} = −٨ ، ب^{٢} = ٧ − ٣ أ = ∛−٨ ، ب = ±√٤ **أ = −٢** ، **ب = ±٢**
③ (أ^{٥} ، ب + ١) = (٣٢ ، ∛٢٧) **(الحل)** أ^{٥} = ٣٢ ، ب + ١ = ٣ أ = ⁵√٣٢ ، ب = ٣ − ١ **أ = ٢** ، **ب = ٢**	④ (أ − ٧ ، ٢٦) = (−٢ ، ب^{٣} − ١) **(الحل)** أ − ٧ = −٢ ، ب^{٣} = ٢٦ + ١ أ = −٢ + ٧ ، ب = ∛٢٧ **أ = ٥** ، **ب = ٣**
⑤ (٢أ ، ٩) = (٦ ، ٣^{ب}) **(الحل)** ٢أ = ٦ ، ٣^{ب} = ٩ $\frac{٢}{٢}$أ = $\frac{٦}{٢}$ ، ٣^{ب} = ٣^{٢} **أ = ٣** ، **ب = ٢**	⑥ (٣أ − ١ ، ٩) = (٥ ، أ + ب) **(الحل)** ٣أ − ١ = ٥ ، أ + ب = ٩ ٣أ = ٥ + ١ ، ٢ + ب = ٩ ٣أ = ٦ ، ب = ٩ − ٢ **أ = ٢** ، **ب = ٧**

مثال ٢ : أجب على الآتي :

① إذا كان: (س − ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣)	② إذا كان: (٩ ، $\sqrt{\text{ص}}$) = (٢س + ١ ، ٢)
أوجد قيمة : $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$	**أوجد قيمة** : $\sqrt[٣]{\text{س} + \text{ص}}$
(الحل) س − ١ = ٨ ، ص + ٣ = ١١	**(الحل)** ٢س + ١ = ٩ ، $\sqrt{\text{ص}}$ = ٢
س = ٨ + ١ ، ص = ١١ − ٣	٢س = ٨ ، ص = ٢^{٢}
س = ٩ ، ص = ٨	س = ٤ ، ص = ٤
∴ $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}} = \sqrt{٩ + ٢ \times ٨}$ = **٥**	∴ $\sqrt[٣]{\text{س} + \text{ص}} = \sqrt[٣]{٤ + ٤}$ = **٢**

الشبكة التربيعية المتعامدة :



مثال ١ : أكمل ما يأتي :

① **النقطة** (٥ ، ٧) **تقع في الربع** الأول

② **النقطة** (− ١ ، − ٦) **تقع في الربع** الثالث

③ **النقطة** (٢ ، −٥) **تقع في الربع** الرابع

④ **النقطة** (− ٤ ، ١) **تقع في الربع** الثاني

ملاحظات هامة :

(١) إذا كانت النقطة تقع على **محور السينات** **فإن: ص = ٠** تكون (عدد ، صفر)

(٢) إذا كانت النقطة تقع على **محور الصادات** **فإن: س = ٠** تكون (صفر ، عدد)

مثال ٢ : أكمل ما يأتي :

① **النقطة** (٢ ، صفر) **تقع على** محور السينات ② **النقطة** (صفر ، − ١) **تقع على** محور الصادات

مثال ٣ : أكمل ما يأتي :

① إذا كانت النقطة (م ، ٧) تقع على محور الصادات **فإن:** م = **صفر**

② إذا كانت النقطة (٥ ، ب − ٦) تقع على محور السينات **فإن:** ب = ...

(الحل) ∵ النقطة تقع على محور السينات ∴ ب − ٦ = ٠ ⟸ ب = ٦

③ **اختر:** إذا كانت النقطة (س − ٤ ، ٢ − س) تقع في الربع **الثالث** **فإن:** س = **٣**

[٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦]

تمارين (١)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

① إذا كان: (س ، ص) = (−٥ ، ٩) فإن: س = ... [−٥ ، ٩ ، {−٥ ، ٩} ، ٤]	② إذا كان: (م + ٥ ، ب) = (٨ ، ٣) فإن: (م ، ب) = ... [(٣ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٨ ، ٣) ، (٥ ، ٥)]
③ إذا كان: (س + ١ ، ٠) = (٢ ، ص − ٥) فإن: س + ص = ... [١ ، ٥ ، ٢ ، ٦]	④ إذا كان: (٢س ، ٨) = (٨ ، ص^{3}) فإن: س − ص = ... [٢ ، ٥ ، ٦ ، ١٦]
⑤ إذا كان: (م + ١ ، ٥) = (−٢ ، ب − ١) فإن: ٢م + ب = ... [−١٢ ، ٠ ، ٢ ، ١٢]	⑥ إذا كان: (س^{3} ، ص + ٣) = (١ ، $\sqrt{٤}$) فإن: س − ص = ... [٣ ، ٢ ، ١ ، ٠]
⑦ إذا كان: (س^{5} ، ٨) = (٣٢ ، س + ص) فإن: ص = ... [٢ ، ٦ ، ٨ ، ١٠]	⑧ إذا كان: (س − ٢ ، ١٣) = (٧ ، ص + ٥) فإن: $\sqrt{س + ٢ص}$ = ... [٦ ، ٥ ، ٢ ، ١]

٢ تمارين متنوعة :

① إذا كان : (س^{3} ، ص + ١) = (−٨ ، $\sqrt[3]{٨}$) **أوجد قيمة** : س ، ص

② إذا كان : (م − ١ ، ٩) = (٤ ، ب^{3} + ١) **أوجد قيمة** : م ، ب

③ إذا كان : (٢س + ١ ، $\sqrt[3]{ص}$) = (٤ ، ٢) **أوجد قيمة** : س × ص

④ إذا كان : ($\sqrt{س}$ − ٢ ، ٣) = (٥ ، ص^{2} − ١) **أوجد قيمة** : س ، ص

⑤ إذا كان : (س − ٧ ، ٢٨) = (−٢ ، ص^{3} + ١) **أوجد قيمة** : $\sqrt[3]{س + ص}$

⑥ إذا كان : (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) **أوجد قيمة** : $\sqrt{س^{2} + ص^{2}}$

⑦ إذا كان : (٣م ، −١) = (١٥ ، ب − ٤) **أوجد قيمة** : $\sqrt{م^{2} - ب^{2}}$

⑧ إذا كان : (س − ٢ ، ٩) = (٥ ، س + ص) **أوجد قيمة** : $\sqrt[3]{٢س - ٣ص}$

⑨ إذا كان : (س^{3} ، ٢س + ٥ص) = (−٨ ، ٦) **أوجد قيمة** : س ، ص

⑩ إذا كان : (س + ٥ ، ٨) = (١ ، ٦ص + س) **أوجد قيمة** : $\frac{\text{س ص}}{\text{س + ص}}$

٣ اختر الإجابة الصحيحة :

① النقطة (-٢ ، -٣) تقع في الربع .... [الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع]
② النقطة (٢ ، -٢) تقع في الربع .... [الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع]
③ النقطة (-٣ ، ٤) تقع في الربع .... [الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع]
④ النقطة (٣ ، ٥) تقع في الربع .... [الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع]
⑤ إذا كانت ب <٣ فإن النقطة (٥ ، ب-٣) تقع في الربع .... [الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع]
⑥ إذا كانت النقطة (٣ ، ب-٥) تقع على محور السينات **فإن:** ب =......... [٨ ، ٥ ، ٢ ، ٦]
⑦ إذا كانت النقطة (س ، ٦) تقع على محور الصادات **فإن:** ٥س + ١ =......... [صفر ، ١ ، ٥ ، ٦]
⑧ إذا كانت النقطة (م - ب ، ٥) تقع على محور الصادات **فإن:** .... [م = ب ، م + ب = **صفر** ، م ≠ ب ، م - ب = ٥]
⑨ إذا كانت النقطة (س-٥ ، ٧-س) تقع في الربع **الثاني** **فإن:** س=......... [٥ ، ٣ ، ٧ ، ٩]
⑩ إذا كانت النقطة (س-٣ ، ٢-س) تقع في الربع **الرابع** **فإن:** س=......... [٤ ، ٣ ، ٢ ، ١]

٤ تمارين متنوعة :

① إذا كانت : ($س^٢$ ، ٢٧) = (١ ، $ص^٣$) ،والنقطة (س ، ص) تقع في الربع الثاني

أوجد قيمة : $\sqrt[س]{ص-س}$

② إذا كانت النقطة (|س| ، ٤) = (٣ ، $ص^٢$) والنقطة (س ، ص) تقع في الربع **الثاني**

أوجد قيمة : س + ص

③ إذا كانت النقطة (٣-س ، ٢ص+٤) تقع في الربع الثاني **أوجد قيم** : س ، ص

حاصل الضرب الديكارتي

الضرب الديكارتي : هو ضرب مجموعات

وفيه نأخذ كل عناصر س مع كل عناصر ص ونكون أزواج مرتبة

إذا كانت : س = {أ ، ب} ، ص = { حـ ، ء}

فإن : س × ص = {أ ، ب} × { حـ ، ء} = { (أ ، حـ) ، (أ ، ء) ، (ب ، حـ) ، (ب ، ء) }

مثال ١ :

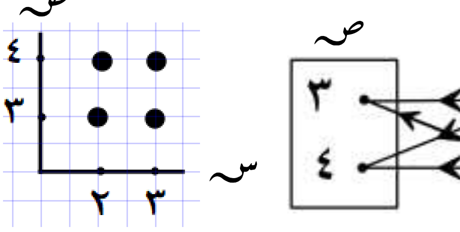
① إذا كان : س = {٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤}

أوجد : س × ص **ومثلها بمخطط سهمي وأخر بياني**

الحل :

س × ص = {٢ ، ٣} × {٣ ، ٤}

= { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) }



مخطط سهمي   مخطط بياني

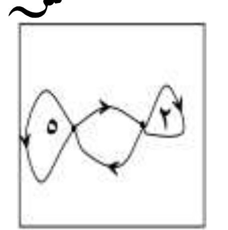
② إذا كان : س = {٢ ، ٥}

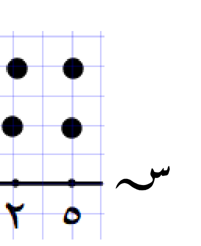
أوجد: س^{٢} **ومثلها بمخطط سهمي وأخر بياني**

الحل :

س^{٢} = {٢ ، ٥} × {٢ ، ٥}

= { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٥) }





مخطط سهمي   مخطط بياني

ملاحظة هامة : س × ص ≠ ص × س   **حيث** : س ≠ ص

مثال ٢ : إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٤}

أوجد كلاً من : س × ص ، ص × س **ماذا تلاحظ ؟**

الحــل

س × ص = {١ ، ٢} × {٢ ، ٣ ، ٤}

= { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) }

، ص × س = {٢ ، ٣ ، ٤} × {١ ، ٢}

= { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) }

نلاحظ أن : س × ص ≠ ص × س   لأن : (١ ، ٢) ≠ (٢ ، ١)

ملاحظات هامة جداً :

❶ ن(س × ص) = ن(س) × ن(ص)   حيث ن عدد عناصر

❷ ن(س^٢) = ن(س) × ن(س)

❸ س × ∅ = ∅ × س = ∅ ،   ن(س × ∅) = صفر

مثال ٣ : إذا كانت : س = {-١ ، ٠ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٥ ، ٦}

أوجد كلاً من : ن(س × ص) ، ن(س^٢) ، ن(ص^٢)

الحــل

ن(س × ص) = ٤ × ٣ = ١٢

ن(س^٢) = ٤ × ٤ = ١٦ ،   ن(ص^٢) = ٣ × ٣ = ٩

مثال ٤ : **أكمل ما يأتي :**

① إذا كان: س = {٣} ، ص = {٥} فإن: س × ص = ... (الحل) = {٣} × {٥} = {(٣ ، ٥)}	② إذا كانت: س = { ٢ } فإن: س^٢ = ... (الحل) = {٢} × {٢} = {(٢ ، ٢)}
③ إذا كان: س = {٣} ، ص = {٥} فإن: ن(س × ص) = ... (الحل) = ١ × ١ = ١	④ إذا كانت: س = {١ ، ٤} ، ص = ∅ فإن: ن(س × ص) = ... (الحل) = ٢ × ٠ = صفر
⑤ إذا كان: ن(س) = ٢ ، ن(ص) = ٣ فإن: ن(س × ص) = ... (الحل) = ٢ × ٣ = ٦	⑥ إذا كان: ن(س) = ٤ ، ص = {٢،٥} فإن: ن(ص × س) = ... (الحل) = ٤ × ٢ = ٨
⑦ ن(س) = ٥ ، ن(س × ص) = ١٥ فإن: ن(ص) = ... (الحل) = ١٥ ÷ ٥ = ٣	⑧ إذا كان: ن(س^٢) = ٩ فإن: ن(س) = ... (الحل) = $\sqrt{٩}$ = ٣

ملاحظات هامة جداً :

❶ **التقاطع ∩ : هو كتابة العناصر المشتركة بين المجموعات**

❷ **الاتحاد ∪ : هو كتابة جميع العناصر مع عدم التكرار**

❸ **الفرق – : هو كتابة العناصر الموجودة في المجموعة الأولي وغير الموجودة في المجموعة الثانية**

مثال ٥ : إذا كان: س = { ٣ ، ٤ } ، ص = { ٤ ، ٥ } ، ع = { ٦ ، ٥ } **أوجد كلاً من :**

① س × (ص ∩ ع) = { ٣ ، ٤ } × { ٥ } = { (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥) }

② (س ∪ ص) × ع = { ٣ ، ٤ ، ٥ } × { ٦ ، ٥ }

= { (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٥) }

③ (س - ص) × (ص - ع) = { ٣ } × { ٤ } = { (٣ ، ٤) }

ملاحظة هامة جداًاً :

❖ إذا كان : (أ ، ب) ∈ س × ص **فإن :** أ ∈ س ، ب ∈ ص

فمثلاً : إذا كان : (٥ ، ٧) ∈ س × ص **فإن :** ٥ ∈ س ، ٧ ∈ ص

مثال ٦ : إذا كانت : س × ص = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) } **أوجد كلاً من :**

① س ، ص ② ص × س ③ $س^2$ ④ ن($ص^2$)

الحــل

① س = { ١ } ، ص = {١ ، ٣ ، ٥}

② ص × س = {١ ، ٣ ، ٥} × { ١ }

= { (١ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٥ ، ١) }

③ $س^2$ = س × س = { ١ } × { ١ } = { (١ ، ١) }

④ ن($ص^2$) = ٣ × ٣ = ٩

مثال ٧ : **أكمل ما يأتي :**

① إذا كان : (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨} فإن: س = ... **(الحل) ٥**	② إذا كان : (٤ ، ٩) ∈ { ٤ ، ٦ } × { س+٢ ، ٥} فإن: س = ... **(الحل) ٧**
③ إذا كان : (٢ ، ٥) ∈ س × ص فإن: (٥ ، ٢) ∈............. **(الحل)** ص × س	④ إذا كانت : س = {١،٢} ، ص = {٤،٥} فإن: (٤ ، ٥) ∈............. **(الحل)** $ص^2$

تمارين (٢)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
① إذا كانت: س = { ٣ } فإن: $س^{٢}$ = ...	[٩ ، (٣،٣) ، {٩} ، {(٣،٣)}]
② إذا كانت: س = { ٧ } فإن: ن($س^{٢}$) = ...	[١ ، ٤٩ ، ١٤ ، ٧]
③ إذا كانت: ن(س) = ٤ ، ن(ص) = ٢ فإن: ن(س × ص) = ...	[٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠]
④ إذا كانت: س = {١،٢} ، ص = {صفر} فإن: ن(س × ص) = ...	[صفر ، ١ ، ٢ ، ٣]
⑤ إذا كانت: س = {٣،٢} ، ن(ص) = ٣ فإن: ن(س × ص) = ...	[٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٢]
⑥ إذا كانت: س = {٥} فإن: ن(س × ∅) = ...	[٠ ، ١ ، ٢ ، ٥]
⑦ إذا كانت: ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ١٢ فإن: ن(ص) = ...	[٤ ، ٩ ، ١٥ ، ٣٦]
⑧ إذا كانت: ن(س × ص) = ٦ ، ص = {٢،١} فإن: ن(س) = ...	[١٦ ، ٩ ، ٤ ، ١]
⑨ إذا كانت: س = {٢،٣،٤} فإن: ن($س^{٢}$) = ...	[٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢]
⑩ إذا كانت: ن($س^{٢}$) = ١٦ فإن: ن(س) = ...	[٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦]
⑪ إذا كانت: ن(س × ص) = ٦ ، ن(ص) = ٢ فإن: ن($س^{٢}$) = ...	[١٦ ، ٩ ، ٤ ، ١]
⑫ إذا كانت: ن($س^{٢}$) = ٤ ، ن(س × ص) = ١٢ فإن: ن(ص) = ...	[٣ ، ٦ ، ٤ ، ١٢]
⑬ إذا كانت: س × ص = {(١ ، ٢)، (١ ، ٣)، (١ ، ٤)} فإن: ن(س) + ن($ص^{٢}$) = ...	[٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٠]
⑭ إذا كانت: (٢ ، ٧) ∈ { ٢ ، ٥ } × { س ، ٩ } فإن: س = ...	[٢ ، ٧ ، ٥ ، ٩]
⑮ إذا كانت: س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٣ } فإن: (١ ، ٣) ∈	[س × ص ، $س^{٢}$ ، ص × س ، $ص^{٢}$]

⑯ **إذا كان:** (٢ ، ٥) ∈ س × ص **فإن:** (٢ ، ٢) ∈	[س × ص ، $س^٢$ ، ص × س ، $ص^٢$]
⑰ **إذا كان:** {٢} × {س ، ص} = {(٢،٤)،(٢،٣)} **فإن:** س - ص = ...	[١ ، -١ ، ±١ ، ٠]
⑱ **إذا كانت:** ن(س × ص) = ٦ ، (س - ص) × ص = {(١،٢)،(١،٣)} **فإن:** س = ...	[{١} ، {١،٢} ، {١،٢،٣} ، {١،٣،٦}]

٢ تمارين متنوعة :

① إذا كان: س = {٣ ، ٤ ، ٨} **أوجد** : $س^٢$ **ومثله بمخطط سهمي**

② إذا كان: س = {٢ ، -١} ، ص = {١ ، -٢ ، ٥}

أوجد : س × ص **ومثله بمخطط سهمي وأخر بياني بمخطط بياني**

③ إذا كان: س = {٢ ، ٥} ، ص = {١ ، ٣ ، ٧} **أوجد** :

① س × ص ② $س^٢$ ③ ن($ص^٢$)

④ إذا كان: س = {-٢ ، ٣} ، ص = {٥} **أوجد** :

① ص × س ② $ص^٢$ ③ ن(س × ص)

⑤ إذا كان: س = {٢ ، ١٥} ، ص = {٤ ، ١} ، ع = {١٥} **أوجد** :

① ص × ع ② ن($س^٢$) ③ (س ∩ ع) × ص

⑥ إذا كان: س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٧} ، ع = {٣} **أوجد** :

① س × ع ② ن($ص^٢$) ③ (ص ∩ ع) × س

⑦ إذا كان: س = {١ ، ٢ ، ٦} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ع = {٤} **أوجد** :

① ص × ع ② (س ∩ ص) × ع ③ ن($ص^٢$)

⑧ إذا كان: س = {١،٥،٦} ، ص = {٥} ، ع = {٢،٣} **أوجد** :

① ن(س × ع) ② (ص ∩ س) × (س - ص)

⑨ إذا كان: س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٦ ، ٥} **أوجد** :

① س × (ص ∩ ع) ② (س ∪ ص) × ع ③ (س − ص) × (ص − ع)

⑩ إذا كان: س = {١،٢،٣،٤} ، ص = {٣،٥،٧} ، ع = {١،٢،٥،٧} **أوجد** :

① (س ∩ ص) × ع ② (ع − س) × ص

⑪ إذا كان: س = {٢،٥} ، ص = {٢،٤}، ع = {٤،٦} **أوجد** :

① ن(س × (ص ∪ ع)) ② (س − ص) × (ع ∩ ص)

⑫ إذا كان: س = {٢،٣} ، ص = {٤،١}، ع = {٢،٤} **أوجد** :

① (س ∩ ع) × (ص ∪ ع) ② (س × ص) ∩ (س × ع)

⑬ إذا كان: س = {١} ، ص = {٢،٣} ، ع = {٢،٥،٦} **أوجد** :

① (ع − ص) × (س ∪ ص) ② (س × ص) ∪ (س × ع)

٣ تمارين متنوعة :

① إذا كان: س × ص = { (٣ ، ٥) ، (٣،٧) ، (٣،٩) ، (٥،٥) ، (٥،٧) ، (٥،٩) }

أوجد : ① س ، ص ② ن(س^{٢})

② إذا كان: س × ص = { (٢،٦) ، (٢،٩) ، (٣،٦) ، (٣،٩) ، (٥،٦) ، (٥،٩) }

أوجد : ① س ، ص ② ص^{٢}

③ إذا كان: س × ص = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) }

أوجد : ① س ، ص ② ن(ص^{٢}) ③ س × (س ∩ ص)

④ إذا كان: س × ص = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) }

أوجد : ① س ∩ ص ② س ∪ ص ③ ص^{٢}

العلاقة - الدالة

العلاقة : **هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي ، وتكتب على شكل أزواج مرتبة**

مسقطها الأول ∋ المجموعة الأولي ،ومسقطها الثاني ∋ المجموعة الثاني

❖ يرمز للعلاقة بالرمز ع

❖ ا ع ب ⟸ علاقة من ا إلي ب **حيث** ا ∋ س ، ب ∋ ص

❖ تكتب الأزواج المرتبة بناءاً على شرط معطي داخل المسألة يأتي بعد كلمة **(تعني أن)**

ملاحظة : العلاقة ع من س **إلى** ص **مجموعة جزئية من** س × ص (ع ⊂ س × ص)

الدالة : يقال لعلاقة من س **إلى** ص **أنها دالة إذا كان** :

① **كل عنصر من عناصر س يظهر مرة واحدة كمسقط أول في بيان ع ⇦ ذلك في الأزواج المرتبة**

② **كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد ف قط ⇦ ذلك في المخطط السهمي**

③ **كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة فقط ⇦ ذلك في المخطط البياني**

خواص الدالة : **إذا كانت العلاقة دالة من س إلى ص فإن :**

① **مجال الدالة** هو المجموعة **س** ② **المجال المقابل** هو المجموعة **ص**

③ **مدي الدالة** هو مجموعة الصور لعناصر المجال **(س)**

==

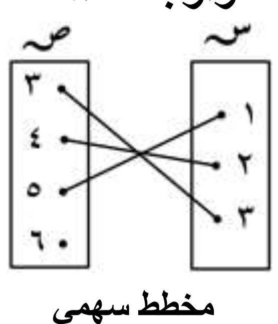
مثال ١ : إذا كانت س = {١،٢،٣} ، ص = {٣،٤،٥،٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ا ع ب " تعني أن (ا + ب = ٦) لكل ا ∋ س ، ب ∋ ص .

① **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي** ② **بين أن ع دالة وأوجد مداها**

الحل

① **بيان ع** = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) }



مخطط سهمي

② **العلاقة ع دالة لأن**

كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط

➢ ، مدي الدالة = { ٥ ، ٤ ، ٣ }

مثال ٢ : إذا كانت سـ= { ١،٢،٣،٤ } ، صـ= { ٢،٤،٦،٨ } وكانت ع علاقة من **سـ** إلى **صـ**

حيث " م ع ب " تعني أن (م = $\frac{١}{٢}$ ب) لكل م ∈ **سـ** ، ب ∈ **صـ**

① اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ② بين ع دالة ③ إذا كانت م ع ٦ أوجد قيمة م

الحـــل ① **بيان ع** = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) }

مخطط سهمي

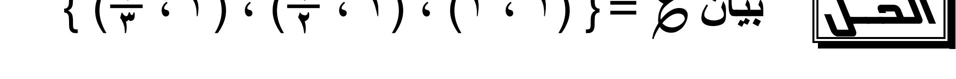
② **العلاقة ع دالة لأن كل عنصر من عناصر سـ يخرج منه سهم واحد**

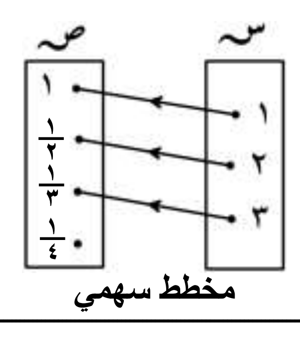
③ م = ٣

مثال ٣ : إذا كانت سـ= { ١،٢،٣ } ، صـ= { ١،$\frac{١}{٢}$،$\frac{١}{٣}$،$\frac{١}{٥}$ } وكانت ع علاقة من **سـ** إلى **صـ**

حيث " م ع ب " تعني أن (العدد م هو المعكوس الضرب للعدد ب) لكل م ∈ **سـ** ، ب ∈ **صـ**

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، وبين أنها دالة واكتب مداها .


الحـــل **بيان ع** = { (١ ، ١) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، $\frac{١}{٣}$) }



مخطط سهمي

➢ **العلاقة ع دالة لأن كل عنصر من عناصر سـ يخرج منه سهم واحد**

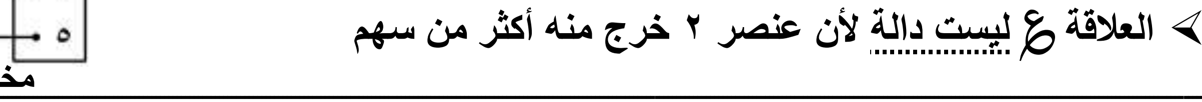
➢ ، مدي الدالة = { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ }

مثال ٤ : إذا كانت سـ= { ١،٢،٥ } ، صـ= { ٣،٧،٨ } وكانت ع علاقة من **سـ** إلى **صـ**

حيث " م ع ب " تعني أن (م + ب = عددًا فرديًا) لكل م ∈ **سـ** ، ب ∈ **صـ**

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

الحـــل **بيان ع** = { (١ ، ٨) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٧) ، (٥ ، ٨) }


➢ **العلاقة ع ليست دالة لأن عنصر ٢ خرج منه أكثر من سهم**

مخطط سهمي

مثال ٥ : إذا كانت **سـ** = { −٢، −١، ٠، ١، ٢ } وكانت ع علاقة من **سـ** إلى **سـ**

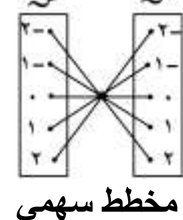
حيث " م ع ب " تعني أن (العدد م هو المعكوس الجمعي للعدد ب) لكل م ∈ **سـ** ، ب ∈ **سـ**

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، وهل ع دالة وإذا كانت دالة اذكر مداها.

الحـــل **بيان ع** = { (−٢ ، ٢) ، (−١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، −١) ، (٢ ، −٢) }

➢ **العلاقة ع دالة لأن كل عنصر من عناصر سـ يخرج منه سهم واحد**

مدي الدالة = { −٢، −١، ٠، ١، ٢ }



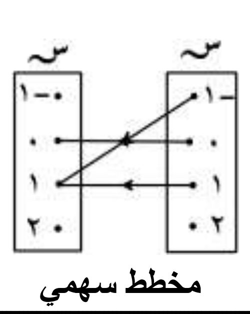
مخطط سهمي

ملاحظة : إذا كانت ع علاقة من س إلى س فإننا نقول ع علاقة على س ويكون ع ⊂ $س^٢$

مثال ٦ : إذا كانت س = { - ١،٠،١،٢ } وكانت ع علاقة من س إلى س

حيث " ٢ ع ب " تعني أن ($٢^٢$ = ب) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟



مخطط سهمي

الحل بيان ع = { (-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) }

➢ العلاقة ع ليست دالة لأن عنصر ٢ لم يخرج منه أي سهم

مثال ٧ : إذا كانت د : س ⟵ ص ، س = { ٣،٥،٧ } ، ص = { ٥،١٥،٢٥،٣٥ }

، بيان الدالة د = { (٣،١٥) ، (٥،٢٥) ، (٧،٣٥) } **فأوجد :**

① مجال الدالة ② المجال المقابل للدالة ③ مدي الدالة ④ قاعدة الدالة د

الحل ① مجال الدالة = { ٣،٥،٧ } ② المجال المقابل للدالة = { ٥،١٥،٢٥،٣٥ }

③ مدي الدالة = { ١٥،٢٥،٣٥ } ④ قاعدة الدالة د هي **د(س) = ٥س**

==

تمارين (٣)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

① **مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمي** ....
[القاعدة ، المجال ، المجال المقابل ، المدي]

② **إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مجال د هو** ....
[س ، ص ، س × ص ، ص × س]

③ **إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مدى الدالة د ⊂ من** ....
[س ، ص ، س × ص ، ع]

④ **إذا كانت ع علاقة من مجموعة س إلى س فإن ع تسمي علاقة على المجموعة س**
وتكون ع .... **س × س** [∈ ، ⊂ ، ∌ ، ⊄]

٢ تمارين متنوعة :

① إذا كانت س = { ١،٣،٥ } ، ص = { ١،٢،٣،٤،٥،٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ + ب = ٧) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، ثم بين أن ع دالة واكتب مداها .

② إذا كانت س = { ٠، ١، ٤، ٦ } ، ص = { ١، ٣، ٥، ٦ } ولدينا ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ + ب < ٦) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

① اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ② هل ع تمثل دالة أم لا ؟ مع ذكر السبب

---

③ إذا كانت س = { ١، ٢، ٣ } ، ص = { - ١ } ولدينا ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ + ب ⩽ ١) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

① اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ② هل ع تمثل دالة أم لا ؟ مع ذكر السبب

---

④ إذا كانت س = { ١، ٢ } ، ص = { ١، ٣، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ ⩽ ب) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

① اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ② هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

---

⑤ إذا كانت س = { ٠، ١، ٢، ٣ } ، ص = { -٣، -٢، -١، ٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (العدد ٢ هو المعكوس الجمعي للعدد ب) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، وهل ع دالة ؟ ولماذا ؟

٢ + ب = ٠

---

⑥ إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١، ٠,٥، ٠,٢٥، ٠,٢} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ هو المعكوس الضربي للعدد ب) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، وهل ع دالة ؟ ولماذا ؟

---

⑦ إذا كانت س = { $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت ع علاقة من س إلى س

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ ب = ١) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ س

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، ثم بين أن ع دالة واكتب مداها .

---

⑧ إذا كانت س = { ١، ٢، ٣، ٤ } ، ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ = $\frac{1}{2}$ ب) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

٢ ٢ = ب

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، وهل ع دالة مع ذكر السبب ؟

---

⑨ إذا كانت س = { ١، ٢، ٣ } ، ص = { ١، ٣، ٦، ٩، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ = $\frac{1}{3}$ ب) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

٣ ٢ = ب

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، بين أنها دالة واكتب مداها

---

⑩ إذا كانت س = { ٤، ٦، ٨، ١٠ } ، ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث " ٢ ع ب " تعني أن (٢ **ضعف** ب) لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

٢ = ٢ ب

اكتب بيان العلاقة ع ومثلها بمخطط سهمي ، بين أنها دالة واكتب مداها

⑪ إذا كانت سـ = { ٠، ١، ٢، ٣ } ، صـ = { - ١، ٠، ١، ٤، ٩ } ،وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ
حيث " ٮ ع ب " تعني أن (ٮ = √ب) لكل ٮ ∈ سـ ، ب ∈ صـ

ٮ٢ = ب

① **اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي** ② **بين أن ع تمثل دالة واكتب مداها .**

---

⑫ إذا كانت سـ = { ٢، ٣، ٤، ٧ } ، صـ = { ١، ٢، ٣، ٤، ٧، ٨ } وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ
حيث " ٮ ع ب " تعني أن (ٮ - ب **عدد أولي**) لكل ٮ ∈ سـ ، ب ∈ صـ
① **اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي** ② **هل ع دالة ؟ ولماذا ؟**

---

⑬ إذا كانت سـ = { - ١، ١، ٢ } ، صـ = { ٢، ٤، ٦، ٨ } وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ
حيث " ٮ ع ب " تعني أن (ب = ٢ٮ + ٤) لكل ٮ ∈ سـ ، ب ∈ صـ
① **اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي** ② **بين ع دالة** ③ **إذا كانت ٮ ع ٨ أوجد قيمة ٮ**

---

⑭ إذا كانت سـ = { ٢، ٣، ٤ } ، صـ = { ص:ص ∈ ط ، ٢ < ص ⩽ ٩ } وكانت ع علاقة من
سـ إلى صـ حيث " ٮ ع ب " تعني أن (ٮ٢ = ب) لكل ٮ ∈ سـ ، ب ∈ صـ
① **اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي** ② **هل ع دالة ؟ ولماذا ؟**

---

⑮ إذا كانت د دالة معرفة على المجموعة سـ حيث سـ = { ٣، ٤، ٥، ٦ } وكانت
د(٣) = ٣ ، د(٤) = ٥ ، د(٥) = ٥ ، د(٦) = ٥
① **مثل د بمخطط سهمي** ② **اكتب بيان د واذكر مداها**

---

⑯ إذا كانت بيان الدالة د = { (٠، ٤) ، (١، ٣) ، (٢، ٢) ، (٣، ١) } **اكتب كلاً من :**
① **مجال الدالة د** ② **مدي الدالة د** ③ **قاعدة الدالة د**

---

⑰ إذا كانت بيان الدالة د = { (١، ٣) ، (٢، ٥) ، (٣، ٧) ، (٤، ٩) ، (٥، ١١) } **اكتب كلاً من :**
① **مجال الدالة د** ② **مدي الدالة د** ③ **قاعدة الدالة د**

---

⑱ إذا كانت سـ = {١، ٣، ٥} ، وكانت ع دالة على سـ
وكان **بيان ع** = { (ٮ، ٣) ، (ب، ١) ، (١، ٥) } **أوجد القيمة العددية للمقدار ٮ + ب**

---

⑲ **<u>في الشكل المقابل :</u> ع علاقة من سـ إلى صـ**

سـ: ٢، ٣، ٥
صـ: ٤، ٩، ١٦، ٢٥

① **أوجد : ن(سـ × صـ)** ② **اكتب : بيان ع**
③ **اكتب : ما تعنيه العلاقة ٮ ع ب حيث ٮ ∈ سـ ، ب ∈ صـ**

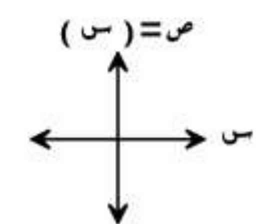
---

⑳ **<u>المخطط السهمي المقابل :</u> يمثل ع علاقة من سـ ⟵ صـ**

سـ: -٣، ١، ٤
صـ: ١، ٢، ٤، ٨

① **اكتب : بيان ع** ② **هل ع دالة ؟ ولماذا ؟**
③ **ما قيمة س إذا كان (س ، ٢) ∈ لبيان ع ؟**

دوال كثيرات الحدود



التعبير الرمزي عن الدالة :

يرمز للدالة بالرمز د(س) على محاور الإحداثيات د(س) = ص

درجة الدالة :

تتحدد من خلال أكبر أس موجود في حدود الدالة بعد تبسيطها .

مثال ١ : أكمل ما يأتي :

① الدالة د : د(س) = $س^٤ - ٢س^٣ + ٥$ دالة كثيرة حدود من الدرجة **الرابعة**
② الدالة د : د(س) = $س^٢ + ٦س - ٧$ من الدرجة **الثانية**
③ الدالة د : د(س) = ٣س - ١ من الدرجة **الأولي**
④ الدالة د : د(س) = ٧ من الدرجة **الصفرية**
⑤ الدالة د : د(س) = $س^٢(٢ - س)$ من الدرجة ....   **(الحل)** د(س) = $٢س^٢ - س^٣$ ⟸ الدالة د من الدرجة **الثالثة**
⑥ الدالة د : د(س) = $(س + ١)^٢$ من الدرجة ....   **(الحل)** د(س) = $س^٢ + ٢س + ١$ ⟸ الدالة د من الدرجة **الثانية**
⑦ الدالة د : د(س) = $س^٢ - (س^٢ + ٣س - ١)$ من الدرجة ....   **(الحل)** د(س) = $س^٢ - س^٢ - ٣س + ١$ ⟸ الدالة د من الدرجة **الأولي**

دوال كثيرات الحدود :

هي دالة تتكون حد أو أكثر .

ويتوفر فيها الشرطان الآتيان :

❶ **كل من المجال والمجال المقابل هو ح** ❷ **الدالة كثيرة حدود لا يوجد بها جذر أو كسر أو أس سالب (س)**

مثال ١ : إذا كانت س = { ٢،٣،٤ } ، ص = { ٣،٤،٥،٦،٧،٨ } وكانت د : س ⟵ ص

حيث **د(س)** = ٩ - س **فأوجد** صور عناصر س بالدالة **د** ثم اكتب بيان الدالة وأوجد مداها

الحل **د(س) = ٩ - س** ⟸ **د(٢) = ٩ - ٢ = ٧**

، **د(٣) = ٩ - ٣ = ٦** ، **د(٤) = ٩ - ٤ = ٥**

∴ بيان الدالة د = { (٢،٧) ، (٣،٦) ، (٤،٥) } ، مدي الدالة = { ٧ ، ٦ ، ٥ }

مثال ٢ : **أكمل ما يأتي :**

① إذا كان د : د(س) = ٥ س – ٧ **فإن:** د(٣) = ... **(الحل)** = ٥ × ٣ – ٧ = ٨	② إذا كانت د : د(س) = ٧س – $\frac{١}{٢}$ **فإن:** د($\frac{١}{٢}$)= .... **(الحل)** = ٧ × $\frac{١}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ = ٣
③ إذا كانت د : د(س) = س^{٢} – س + ٣ **فإن:** د(– ٢) = ... **(الحل)** = (– ٢)^{٢} – (– ٢) + ٣ = ٩	④ إذا كانت النقطة (٢ ، ب) ∋ بيان الدالة د حيث د(س)= ٣س – ٦ **فإن:** ب = ... **(الحل)** ب = ٣ × ٢ – ٦ = ٠
⑤ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) ∋ بيان الدالة د حيث د(س)= ٢س – ٣ **فإن:** أ = ... **(الحل)** ∵ ٢ × أ – ٣ = ٣ ∴ ٢أ = ٦ (÷٢) ⟸ أ = ٣	⑥ إذا كانت النقطة (٢ ، – ٦) ∋ بيان الدالة د حيث د(س)= مس + ٨ **فإن:** م = ... **(الحل)** م × ٢ + ٨ = – ٦ ∴ ٢م = – ١٤ (÷٢) ⟸ م= – ٧

مثال ٣ : إذا كانت د(س) = ٤س + ب ، د(٣)= ١٥ **أوجد قيمة** : ب

الحل

∵ د(٣)= ١٥ ∴ ٤ × ٣ + ب = ١٥

∴ ١٢ + ب = ١٥ **∴ ب = ٣**

مثال ٤ : إذا كانت د: ع ⟵ ع حيث د(س)= س^{٢} – س – ١ ، ر(س)= س^{٥} + ١

① **عين درجة كل من الدالتين** د ، ر ② **أوجد قيمة** : د(٢) + ر(– ١)

الحل

① درجة الدالة د من الدرجة **الثانية** ، درجة الدالة ر من الدرجة **الخامسة**

② **د(٢)** = (٢)^{٢} – ٢ – ١ = ١ ، ر **(– ١)** = (– ١)^{٥} + ١ = **صفر**

∴ د(٢) + ر(– ١) = ١ + ٠ = **١**

==

تمارين (٤)

١ **إذا كانت د: ح ⟵ ح فأذكر درجة الدالة د في كل مما يأتي :**

① د(س) = س^{٣} – ٥س^{٢} + ٧	② د(س) = ٣ – ٢س
③ د(س) = س^{٢} + ٦س	④ د(س) = ١
⑤ د(س) = س (٢س^{٣} + ٥س)	⑥ د(س) = س (س – ٤) + ١
⑦ د(س) = س (٣س + ٢)^{٢}	⑧ د(س) = س^{٢} (س – ٣)^{٢}
⑨ د(س) = س^{٢} –(س^{٢} – ٣س)	⑩ د(س) = س^{٣} –(س^{٣} – ٧)

٢ أكمل ما يأتي :

① إذا كانت د(س) = س − ٤ **فإن:** د(٧) = ...	② إذا كان د(س) = ٥ س − ٣ **فإن:** د(٠) = ...
③ إذا كان د(س) = س^{٢} + ٧ **فإن:** د(٣) = ...	④ إذا كان د(س) = س^{٢} − ٢ س **فإن:** د(٣) = ...
⑤ إذا كان د(س) = ٢س^{٢} **فإن:** د(− ٣) = ...	⑥ إذا كان د(س) = (١ − س)^{٢} **فإن:** د(− ١) = ...
⑦ إذا كان د(س) = س^{٢} − √٢ س **فإن:** د(√٢) = ...	⑧ إذا كان د(س) = س − ٢ **فإن:** د(٠) + د(٤) = ...
⑨ إذا كان د(س) = س^{٢} **فإن:** د(٣) + د(− ٣) = ...	⑩ إذا كان د(س) = س^{٣} **فإن:** د(٢) + د(− ٢) = ...
⑪ إذا كانت النقطة (٢ ، ب) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ٣س + ١ **فإن:** ب = ...	
⑫ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ٤س − ٥ **فإن:** أ = ...	
⑬ إذا كانت النقطة (− ١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = م س + ٢ **فإن:** م = ...	
⑭ إذا كانت النقطة (أ ، أ) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ٤س − ٦ **فإن:** أ = ...	
⑮ إذا كان د(س) = ك س + ٨ ، د(٢) = ٠ **فإن:** ك = ...	
⑯ إذا كانت د(س) = س − ٦ وكان: $\frac{١}{٣}$ د(أ) = − ٢ **فإن:** أ = ...	

٣ تمارين متنوعة :

① إذا كانت د: ع ← ع حيث د(س) = ٣ − ٢س **اذكر درجة د ثم أوجد:** د(١) ، د(٠) ، د(− ١)

② إذا كانت د(س) = س^{٢} − س + ٣ **أوجد:** د(− ٢) ، د(١) ، د(٠) ، د(√٣)

③ إذا كانت د: ع ← ع حيث د(س) = ٢س^{٢} − ٥س + ٢

(١) اذكر درجة د **(٢) أثبت أن : د(٢) = د($\frac{١}{٢}$)**

④ إذا كانت د(س) = − ٢س + ٣ ، ر(س) = − ٧

(١) عين درجة كل من الدالتين د ، ر **(٢) احسب قيمة :** د(٠) × ر(٠)

⑤ إذا كانت د(س) = ٢س + ٥ ، ر(س) = س − ٦ **حيث د ، ر من دوال كثيرات الحدود**

أثبت أن : د(٢) + ٣ ر(٣) = صفر

⑥ إذا كانت د(س) = ٢ س + ب ، ر(س) = ب **حيث د ، ر من دوال كثيرات الحدود**

وكان د(١) + ر(٤) = ١٢ **أوجد قيمة :** د(٤) + ر(− ١)

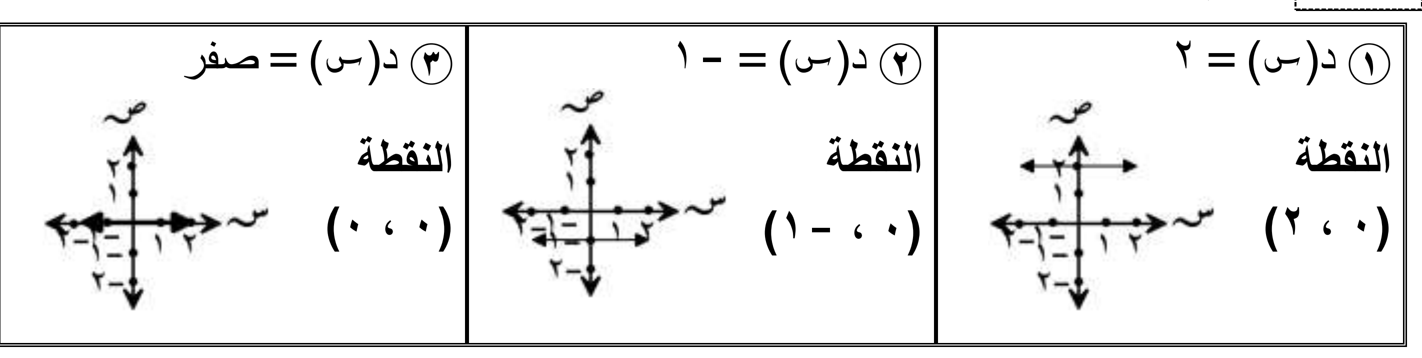
دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولاً : الدالة الثابتة :

تعريف : الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = حـ حيث حـ عدد حقيقي

تمثل بيانيًا بخط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، حـ)

مثال ١ : **مثل بيانيًا الدوال الآتية** ، وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات :



① د(س) = ٢	② د(س) = – ١	③ د(س) = صفر
النقطة (٠ ، ٢)	النقطة (٠ ، – ١)	النقطة (٠ ، ٠)

مثال ٢ : **أكمل ما يأتي :**

① إذا كانت د : د(س) = ٣ فإن: د(٢) = ٣	② إذا كانت د : د(س) = ٧ فإن: د(– ٣) = ٧
③ إذا كانت د : د(س) = ٢ فإن: د(١) + د(– ١) = ... (الحل) = ٢ + ٢ = ٤	④ إذا كانت د : د(س) = ٣ فإن: ٣ د(– ٢) – ٢ د(٣) = ... (الحل) = ٣ × ٣ – ٢ × ٣ = ٣
⑤ إذا كانت د : د(٣س) = ٤ فإن: د(– س) = ٤	⑥ إذا كانت د : د(س) = ٣ فإن: $\frac{د(٥)}{د(١٠)} = \frac{٣}{٣} = ١$

ثانياً : الدالة التربيعية :

تعريف : الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = أس^{٢} + بس + حـ حيث أ ≠ صفر.

وهي دالة من الدرجة الثانية وتمثل بمنحني على حرف ∪ أو ∩

ملاحظة هامة : يمكن تكوين الجدول المستخدم في رسم الدوال التربيعية باستخدام الآلة كالآتي :

نضغط على MODE ثم Table ثم كتابة الدالة (لكتابة X يضغط (ALPHA)

ثم نضغط على = ثم بداية الفترة ثم = ثم نهاية الفترة ثم == فيظهر الجدول

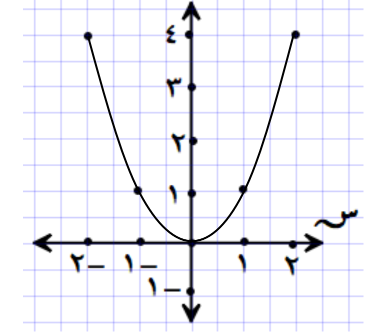
التمثيل البياني للدالة التربيعية :

مثال ٣ : مثل بيانيًا الدوال الآتية ،ثم أوجد رأس المنحني – معادلة محور التماثل – القيمة العظمى أو الصغرى :

① د(س) = $س^{٢}$ حيث س ∈ [-٢ ، ٢]

(الحل)

س	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	٤	١	٠	١	٤

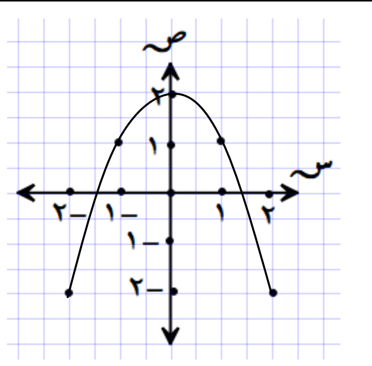


* نقطة رأس المنحني هي (٠ ، ٠)
* معادلة محور التماثل هي س = ٠
* القيمة الصغرى هي صفر

② د(س) = ٢ - $س^{٢}$ حيث س ∈ [-٢ ، ٢]

(الحل)

س	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	-٢	١	٢	١	-٢

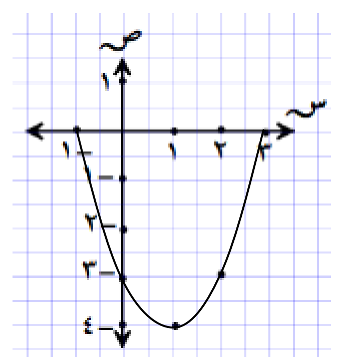


* نقطة رأس المنحني هي (٠ ، ٢)
* معادلة محور التماثل هي س = ٠
* القيمة العظمى هي ٢

① د(س) = $س^{٢}$ - ٢س - ٣ حيث س ∈ [-١ ، ٣]

(الحل)

س	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٠	-٣	-٤	-٣	٠

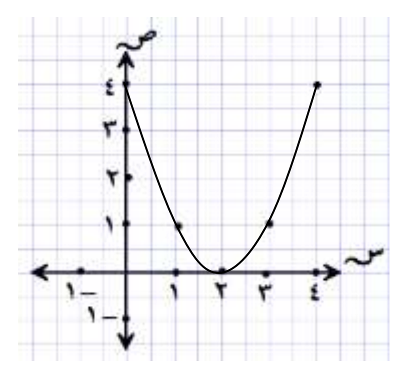


* نقطة رأس المنحني هي (١ ، -٤)
* معادلة محور التماثل هي س = ١
* القيمة الصغرى هي -٤

② د(س) = $(س - ٢)^{٢}$ حيث س ∈ [٠ ، ٤]

(الحل)

س	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٤	١	٠	١	٤



* نقطة رأس المنحني هي (٢ ، ٠)
* معادلة محور التماثل هي س = ٢
* القيمة الصغرى هي صفر

ثالثاً : الدالة الخطية :

تعريف : الدالة د: ع ← ع حيث د(س) = م س + ب حيث م ، ب ∈ ع ، م ≠ صفر.

وهي دالة من الدرجة الأولي وتمثل بيانياً بخط مستقيم

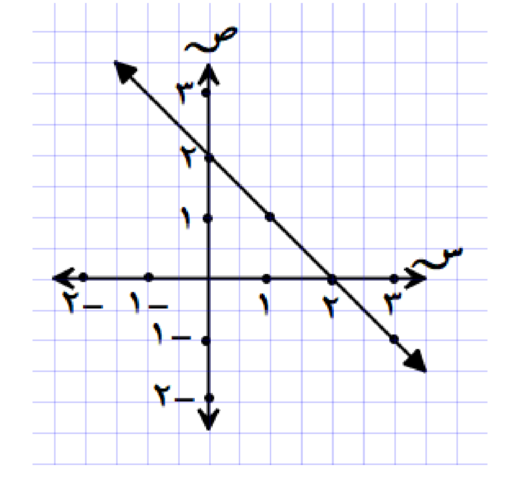
التمثيل البياني للدالة الخطية :

مثال ٤ : **مثل بيانيًا الدوال الآتية ، وأوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محوري الإحداثيات :**

① د(س) = ٢ − س

(الحل)

س	١	٢	٣
د(س)	١	٠	١ −



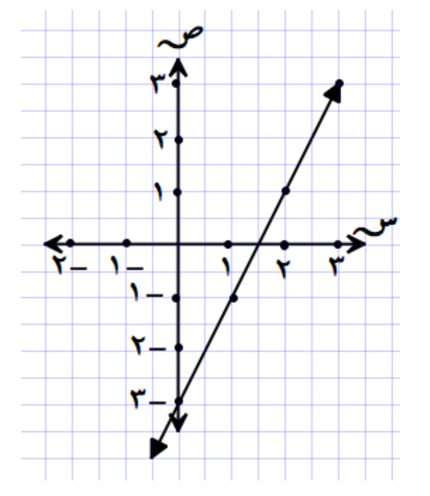
* نقطة التقاطع مع محور السينات = (٢ ، ٠)

* نقطة التقاطع مع محور الصادات = (٠ ، ٢)

② د(س) = ٢س − ٣

(الحل)

س	١	٢	٣
د(س)	١ −	١	٣



* نقطة التقاطع مع محور السينات = ($1\frac{1}{2}$ ، ٠)

* نقطة التقاطع مع محور الصادات = (٠ ، −٣)

ملاحظة : الدالة د : ع ← ع حيث د(س) = م س ، م ∈ ع* يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠)

مثال ٥ : **أكمل ما يأتي :**

① إذا كانت النقطة (−٣ ، ب) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د(س) = ٢س + ٧

فإن: ب = ... **(الحل)** ب = ٢ × (−٣) + ٧ = **١**

② إذا كانت النقطة (م ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع

حيث د(س) = ٤س − ٥ **فإن:** م = ...

(الحل) د(م) = ٤م − ٥ = ٣ ⟸ ٤م = ٨ (÷ ٤) ∴ **م = ٢**

③ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د(س) = ٢س − ١ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور **الصادات** في النقطة ....

(الحل) د(٠) = ٢ × ٠ − ١ = − ١ ∴ النقطة هي **(٠ ، − ١)**

④ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د(س) = ٣س + ٦ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور **السينات** في النقطة ....

(الحل) د(س) = ٣س + ٦ = ٠ ⟸ ٣س = − ٦ (÷ ٣)

∴ س = − ٢ ∴ النقطة هي **(− ٢ ، ٠)**

⑤ **اختر:** الدالة د حيث د(س) = ٥س يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة ....

[(٥ ، ٥) ، (٠ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥)]

مثال ٦ : إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ح ⟵ ح حيث **د(س) = ٦س − ٩** يقطع محور الصادات في النقطة **(ب ، ٣)** **أوجد قيمة** : **٢٩ + ٧ ب**

الحل

∵ المستقيم يقطع محور الصادات ∴ س = صفر **∴ ب = صفر**

، **وتكون النقطة** (٠ ، ٣) ⟸ د(٠) = ٦ × ٠ − ٩ = ٣ **∴ ٩ = − ٣**

∴ ٢٩ + ٧ ب = ٢ × (− ٣) + ٧ × صفر = **− ٦**

مثال ٧ : إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ح ⟵ ح حيث **د(س) = ٣س − ٩** يقطع محور السينات في النقطة **(٢ ، ب)** **أوجد قيمة** : **٢٩ + ٣ ب**

الحل

∵ المستقيم يقطع محور السينات ∴ ص = صفر **∴ ب = صفر**

، **وتكون النقطة** (٢ ، ٠) ⟸ د(٢) = ٣ × ٢ − ٩ = ٠ **∴ ٩ = ٦**

∴ ٢٩ + ٣ ب = ٢ × ٦ + ٣ × صفر = **١٢**

==

تمارين (٥)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

① إذا كان د(س) = ٤	**فإن:** د(٣) = ...	[٤ ، ١٢ ، ٧ ، $\frac{٣}{٤}$]
② إذا كان د(س) = − ٥	**فإن:** د(− ٢) = ...	[٥ ، − ٥ ، ١٠ ، − ١٠]
③ إذا كان د(س) = ٥	**فإن:** د(٣) + د(− ٣) = ...	[صفر ، ١٠ ، ٦ ، − ٦]
④ إذا كان د(س) = ٣	**فإن:** ٦ د($\frac{١}{٢}$) = ...	[٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٨]

⑤ إذا كانت د(س) = ٥ تمثل بمستقيم يوازي محور السينات فإنه يمر بالنقطة ....
[(٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠) ، (٥ ، -٥) ، (٠ ، ٠)]

⑥ الدالة د حيث د(س) = -٢س يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة ....
[(-٢ ، ٠) ، (٠ ، -٢) ، (٠ ، ٠) ، (-٢ ، -٢)]

⑦ إذا كانت النقطة (١ ، ب) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع
حيث د(س) = ٥س + ٤ فإن: ب = ... [٥ ، ٤ ، ٩ ، ١]

⑧ إذا كانت النقطة (أ ، ٢) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع
حيث د(س) = ٣س - ١ فإن: أ = ... [٢ ، ٣ ، ١ ، -١]

٢ **مثل بيانياً الدوال الآتية ، ومن الرسم استنتج إحداثي رأس المنحني ، ومعادلة محور التماثل ، والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة :**

① د(س) = $س^٢$ + ١ **حيث** س ∈ [-٣ ، ٣]	② د(س) = $س^٢$ - ٢ **حيث** س ∈ [-٣ ، ٣]
③ د(س) = $-س^٢$ **حيث** س ∈ [-٣ ، ٣]	④ د(س) = ٤ - $س^٢$ **حيث** س ∈ [-٣ ، ٣]
⑤ د(س) = $س^٢$ - ٢س **حيث** س ∈ [-١ ، ٣]	⑥ د(س) = س(٤ - س) **حيث** س ∈ [-١ ، ٥]
⑦ د(س) = $(س - ١)^٢$ **حيث** س ∈ [-١ ، ٣]	⑧ د(س) = $(س - ٣)^٢$ **حيث** س ∈ [٠ ، ٦]
⑨ د(س) = $س^٢$ + ٢س + ١ **حيث** س ∈ [-٤ ، ٢]	
⑩ د(س) = $س^٢$ - ٤س + ٣ **حيث** س ∈ [-١ ، ٥]	

٣ **مثل بيانياً الدوال الآتية ، وأوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محوري الإحداثيات :**

① د(س) = س - ٢ ② د(س) = ٢س + ١

③ د(س) = ٢س - ٤ ④ د(س) = ٣س - ٢

٤ ① **مثل بيانياً الدالة الخطية** د: ع ← ع حيث د(س) = س + ٢ **ومن الرسم** :
أوجد مساحة سطح المثلث المحصور بين المستقيم الممثل للدالة ومحوري الإحداثيات.

② **ارسم منحني الدالة** د حيث د(س) = ٩ - $س^٢$ **حيث** س ∈ [-٣ ، ٣] **ومن الرسم** :
(١) عين القيمة العظمى للدالة ومعادلة محور التماثل لمنحني الدالـة.
(٢) أوجد مساحة سطح المثلث الذي رؤوسه نقط تقاطع المنحني مع المحورين.

٥ **تمارين متنوعة :**

① إذا كانت النقطة (٣ ، ب) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع
حيث د(س) = ٥س + ٤ **أوجد قيمة** : ب

③ إذا كانت النقطة (أ ، ٥) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع

حيث د(س) = ٣س − ٤ **أوجد قيمة** : أ

④ إذا كانت الدالة د(س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، −٥)

أوجد : **(١)** د($\frac{٢}{٣}$) **(٢) قيمة أ**

⑤ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع حيث د(س) = ٣س − أ يقطع محور **الصادات**

في النقطة (ب ، ٢) **أوجد قيمة** : ٥أ + ٤ ب

⑥ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع حيث د(س) = ٣س − أ يقطع محور **السينات**

في النقطة (٣ ، ب) **أوجد قيمة** : أ^ب

⑦ إذا كانت النقطة (٢ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع

حيث د(س) = أ س − ٥ **أوجد** : **قيمة أ ، ثم أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات**

⑧ إذا كانت (٢ ، ٤) ∋ بيان الدالة د حيث د(س) = م س + ٢

(١) أوجد قيمة : أ **(٢) مثل الدالة د بيانيًا**

⑨ إذا كانت (٢أ ، ٥أ) ∋ بيان الدالة د حيث د(س) = ٢ س + ٥

(١) أوجد قيمة : أ **(٢) أوجد** : **نقطتي تقاطع الدالة د مع محور الإحداثيات**

⑩ إذا كانت النقطتان (أ ، ٣) ، (٣ ، ب) تقعان على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ع ← ع

حيث د(س) = ٤س − ٥ **أوجد قيمة** : ٦٢أ + ب

⑪ إذا كانت د(س) = أ س − ب ، وكان د(٢) = ٧ والمستقيم الذي يمثل هذه الدالة يقطع من

محور الصادات جزءًا موجبًا يساوي ٣ وحدات طول **أوجد قيمة** : أ ، ب

⑫ إذا كان منحني الدالة د: ع ← ع حيث د(س) = م − س^٢ يقطع محور **السينات** في

النقطة (−٢ ، ب) **أوجد قيمة** : م^ب + ٢م

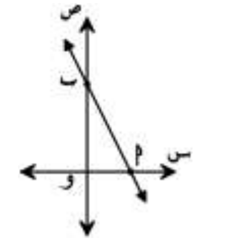
---

٧ ① **الشكل المقابل يمثل الدالة : د حيث**

د(س) = ٤ − ٢س **أوجد** :

(١) إحداثيي كل من النقطتين أ ، ب

(٢) مساحة سطح Δ أ و ب



---

② **الشكل المقابل يمثل منحني الدالة التربيعية د**

حيث د(س) = ٤ − ك س^٢ ، ك ثابت ≠ صفر

، أ(٠ ، ٤) هي رأس المنحني ، و هي نقطة

الأصل ، ب ، حـ ∋ محور السينات

، مساحة Δ الذي رؤوسه أ ، ب ، حـ = ٨ وحدات طول

أوجد : **(١) معادلة محور التماثل ، القيمة العظمي للدالة د**

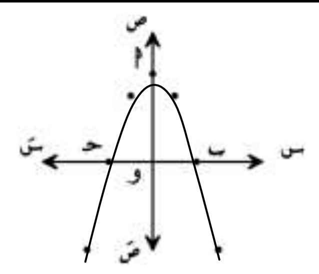
(٢) إحداثيي نقطة ب (٣) قيمة ك

③ **الشكل المقابل يمثل منحني الدالة د حيث**

د(س) = م − س^2 ، إذا كان أ و = ٤ وحدات

أوجد : **(١) قيمة م** **(٢) إحداثيي كل من ب ، حـ**

(٣) مساحة المثلث الذي رؤوسه أ ، ب ، حـ



امتحان على الوحدة الأولي

$\frac{\quad}{15}$

١ ⇦ **اختر الإجابة الصحيحة :**

① **إذا كانت : س = { ٢ } ، ص = { ١ ، ٢ } فإن: ن(س × ص) =........** (١ ، ٤ ، ٣ ، ٢)

② النقطة (٥ ، −٣) تقع في **الربع** .... (الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع)

③ الدالة د حيث د(س) = س^2 − ٣ **من الدرجة** .... (الأولي ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة)

④ **إذا كان:** (س − ١ ، ٤) = (٠ ، ٢ص) **فإن: س − ص = ...** (٣ ، ١ ، ٢ ، −٣)

⑤ **إذا كانت النقطة (أ ، ٥) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ع ← ع حيث د(س) = ٣س − ٤**

فإن : أ = ... (٣ ، −٣ ، ١ ، −١)

⑥ **إذا كانت : د(س) = ٥ فإن : د(٣) = ...** (٥ ، ١٥ ، ٨ ، $\frac{3}{5}$)

---

٢ ⇦ Ⓐ **إذا كان : (أ + ٣ ، ٧) = (−٢ ، ب^3 − ١)** **أوجد قيمة : أ ، ب**

Ⓑ **إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س ← ص**

حيث أ ع ب تعني أن " ب = أ + ٤ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ، وبين أن ع دالـة ؟ وأوجد مداها ؟ .

---

٣ ⇦ Ⓐ **إذا كان:** س × ص = { (٣،٥) ، (٣،٧) ، (٣،٩) ، (٥،٥) ، (٥،٧) ، (٥،٩) } **أوجد :**

① س ، ص ② ص × س

Ⓑ **مثل بيانياً منحني الدالة د حيث د(س) = س^2 − ٤ في الفترة [−٣ ، ٣] ومن الرسم عين :**

(أولاً) إحداثي رأس المنحني (ثانياً) معادلة محور التماثل

---

٤ ⇦ Ⓐ **إذا كان:** س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٣ ، ٥ ، ٦} **أوجد :**

① ن(ص^2) ② (س ∩ ص) × ص

Ⓑ إذا كان المستقيم الممثل للدالة **د:ح ← ح حيث د(س) = أ − س** يقطع محور الصادات في

النقطة (ب ، ٣) **أوجد قيمة : ٢أ + ٣ب**

---

٥ ⇦ Ⓐ **مثل بيانياً الدالة د حيث د(س) = ٣ − ٢س**

Ⓑ **إذا كان:** د(س) = ٢س − ١ **أثبت أن : د(٢) − ٣ د(١) = صفر**

النسبة

تعريف النسبة :

النسبة بين الكميتين م ، ب تكتب بإحدى الصورتين م : ب أو $\frac{م}{ب}$

ويسمي م **بمقدم النسبة** ، ويسمي ب **بتالي النسبة** ، ويسمي م ، ب معاً **بحدي النسبة**

مثال ١ : **أوجد :** النسبة بين طولي رجل وابنه حيث طول الرجل متر ونصف وطول ابنه ٦٠سم

(الحل)

$\frac{\text{طول الرجل}}{\text{طول الأبن}} = \frac{١,٥ \times ١٠٠}{٦٠} = \frac{١٥٠}{٦٠} = \boxed{\frac{٥}{٢}}$

> **ملاحظة :** يجب أن تكون كميتي النسبة من نفس النوع ونفس الوحدة

خواص النسبة : ⇩

❶ النسبة **لا تتغير** إذا ضرب حداها (أو قسما) على عدد حقيقي ≠ صفر

فمثلاً : $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦} =$ .... ، $\frac{٨}{١٢} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} =$ ....

❷ النسبة **تتغير** إذا أضيف إلي حديها (أو طرح منها) عدد حقيقي ≠ صفر

❸ **إذا كان :** $\frac{م}{ب} = \frac{ح}{ء}$ فــإن : م × ء = ب × ح

أي أن : (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

ملاحظة : **إذا كانت** : النسبة بين عددين ٣ : ٥ فــإننا : نفرض أن العددين ٣س ، ٥س

مثال ١ : **أجب على الآتي :**

① إذا كان : $\frac{٣س-٣}{٢س+٥} = \frac{٤}{٥}$ أوجد قيمة: س

(الحل)

∴ ٥ (٣س − ٣) = ٤(٢س + ٥)

∴ ١٥ س − ١٥ = ٨س + ٢٠

∴ ١٥ س − ٨ س = ٢٠ + ١٥

∴ ٧س = ٣٥ (÷ ٧)

⟸ $\boxed{\text{س} = ٥}$

② **أوجد** العدد الذي أضيف إلى حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

(الحل) نفرض أن : العدد هو س

∴ $\frac{س+٧}{س+١١} = \frac{٢}{٣}$

⟸ ٣(س + ٧) = ٢(س + ١١)

٣س + ٢١ = ٢س + ٢٢

∴ ٣س − ٢س = ٢٢ − ٢١

∴ س = ١ ∴ **العدد هو ١**

③ **أوجد العدد الموجب الذي أضيف مربعه إلى حدي النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح $\frac{٣}{٥}$**

(الحل) نفرض أن : العدد الموجب هو س

$\therefore \frac{س^٢ + ٥}{س^٢ + ١١} = \frac{٣}{٥}$

$\Longleftarrow$ ٥(س^٢ + ٥) = ٣(س^٢ + ١١)

٥س^٢ + ٢٥ = ٣س^٢ + ٣٣

$\therefore$ ٥س^٢ - ٣س^٢ = ٣٣ - ٢٥

$\therefore$ ٢س^٢ = ٨ (÷٤) $\Longleftarrow$ س^٢ = ٤

$\therefore$ س = ± $\sqrt{٤}$ = ± ٢ $\therefore$ **العدد هو ٢**

④ **عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف للأول ٦ وطرح من الثاني ٥ صارت النسبة بينهما ٥ : ٤ أوجد العددين**

(الحل) نفرض أن : العددان ٢س ، ٣س

$\therefore \frac{٢س+٦}{٣س-٥} = \frac{٥}{٤}$

$\Longleftarrow$ ٥(٣س - ٥) = ٤(٢س + ٦)

١٥س - ٢٥ = ٨س + ٢٤

$\therefore$ ١٥س - ٨س = ٢٤ + ٢٥

$\therefore$ ٧س = ٤٩ (÷٧) $\Longleftarrow$ س = ٧

$\therefore$ **العددان هما ١٤ ، ٢١**

==

تمارين (٦)

١ أوجد قيمة س :

① إذا كان : $\frac{س+٤}{٥س-١} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة: س ② إذا كان : $\frac{٩س+٣}{٧س-١} = \frac{٣}{٢}$ أوجد قيمة: س

---

٢ مسائل اللفظية :

① **أوجد العدد** الذي أضيف إلى حدي النسبة ٧ : ٢ فإنها تصبح ٣ : ٢

② **أوجد العدد** الذي أضيف إلى حدي النسبة $\frac{٢}{٥}$ فإنها تصبح $\frac{١}{٢}$

③ **أوجد العدد** الذي طرح من كل من حدي النسبة $\frac{٥}{٦}$ لأصبحت $\frac{٣}{٢}$

④ **أوجد العدد** الذي طرح ثلاثة أمثاله من حدي النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

⑤ **أوجد العدد** الذي أضيف مربعه إلى حدي النسبة ٣ : ٥ فإنها تصبح ٦ : ٧

⑥ **أوجد العدد** الموجب الذي إذا أضُيف مربعه إلى مقدم النسبة ١٧ : ١٨ ،وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل على النسبة ٣ : ٢

⑦ عددان صحيحان موجبان، النسبة بينهما ٣:٧ ،وإذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١:٣ **فما العددان؟**

⑧ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ ،وإذا أضيف للأول ٤ وطرح من الثاني ٤ صارت النسبة بينهما ٢:١ **أوجد العددين**

⑨ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ ،وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ **أوجد العددين**

⑩ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ وإذا أضيف للعدد الأصغر ٤ وطرح من العدد الأكبر ٣ صارت النسبة بينهما ٨ : ٩ **أوجد العددين**

التناسب

تعريف التناسب : هو تساوي نسبتين أو أكثر

فمثلاً : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ **أو** $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و}$

❀ **إذا كان** : أ ، ب ، حـ ، ء **كميات متناسبة** **فإن :** $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$

ويُسمي : أ بالأول المتناسب ، ب بالثاني المتناسب ، حـ بالثالث المتناسب ، ء بالرابع المتناسب

كما يُسمي : أ ، ء طرفاً المتناسب ، ب ، حـ وسطاً المتناسب

ملاحظة هامة : ⇦ **إذا كان** : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ **فإن :** أ ، ب ، حـ ، ء **كميات متناسبة**

مثال ١ : أكمل ما يأتي :

① الأول المتناسب للأعداد ٧ ، ١٠ ، ١٤ هو .... **(الحل)** نفرض أن : الأول المتناسب هو س ∴ الكميات س ، ٧ ، ١٠ ، ١٤ ∴ $\frac{س}{٧} = \frac{١٠}{١٤}$ ⟸ س = $\frac{٧ \times ١٠}{١٤}$ = **٥**	② **إذا كانت:** ٤ ، س ، ١٢ ، ١٨ كميات متناسبة فإن: س = ... **(الحل)** ∵ ٤ ، س ، ١٢ ، ١٨ كميات متناسبة ∴ $\frac{٤}{س} = \frac{١٢}{١٨}$ ⟸ س = $\frac{٤ \times ١٨}{١٢}$ = **٦**
③ الثالث المتناسب للأعداد ٤ ، ٣ ، .... ، ٦ هو .... **(الحل)** نفرض أن : الثالث المتناسب هو س ∴ الكميات ٤ ، ٣ ، س ، ٦ ∴ $\frac{٤}{٣} = \frac{س}{٦}$ ⟸ س = $\frac{٤ \times ٦}{٣}$ = **٨**	④ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٩ ، ٩ هو .... **(الحل)** نفرض أن : الرابع المتناسب هو س ∴ الكميات ٣ ، ٩ ، ٩ ، س ∴ $\frac{٣}{٩} = \frac{٩}{س}$ ⟸ س = $\frac{٩ \times ٩}{٣}$ = **٢٧**
⑤ **إذا كانت:** أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة **فإن:** ب : أ = ... **(الحل)** ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب : أ = ٣ : ٢	⑥ الرابع المتناسب للكميات ١٨ $أ^{٢}$ ب ، ١٢ أ $ب^{٢}$ ، ٢١ أ ب هو .... **(الحل)** الرابع المتناسب هو ١٤ $ب^{٢}$

مثال ٢ :

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد : ١ ، ١٣ ، ٧ ، ٣١ لحصلنا على أعداد متناسبة	∴ (س + ١) (س + ٣١) = (س + ٧)(س + ١٣)
(الحل) نفرض أن : العدد هو س	∴ $\cancel{س^2}$ + ٣٢س + ٣١ = $\cancel{س^2}$ + ٢٠س + ٩١
∴ الأعداد هي س + ١ ، س + ١٣ ، س + ٧ ، س + ٣١	∴ ٣٢س − ٢٠س = ٩١ − ٣١
∴ $\frac{س+١}{س+١٣} = \frac{س+٧}{س+٣١}$	∴ ١٢س = ٦٠ (÷ ٥) ⟸ س = ٥
	∴ العدد المطلوب هو ٥

خواص التناسب : ⇩

خاصية (١)

إذا كان : أ × ء = ب × حـ **فإن** : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ **أي أن** : $\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالي النسبة الأولى}}{\text{تالي النسبة الثانية}}$

فمثلاً : إذا كان : ٣ س = ٥ ص فـإن : $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٣}$

مثال ٣ : أكمل ما يأتي :

(١) إذا كان: ٤ أ − ٧ ب = ٠ فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ...	(٢) إذا كان: ٢ أ = $\frac{٣}{٢}$ ب فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ...
(الحل) ٤ أ = ٧ ب ∴ $\frac{أ}{ب} = \boxed{\frac{٧}{٤}}$	**(الحل)** $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٢} \div ٢$ ∴ $\frac{أ}{ب} = \boxed{\frac{٣}{٤}}$

مثال ٤ : أجب على الآتي :

(١) إذا كان: $\frac{س+٣ص}{٢س-ص} = \frac{٤}{٣}$ أوجد قيمة: ص:س	(٢) إذا كان: $\frac{أ}{ب-أ} = \frac{حـ}{ء-حـ}$
(الحل)	أثبت أن : أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة
∴ ٣ (س + ٣ص) = ٤(٢س − ص)	**(الحل)** ∵ $\frac{أ}{ب-أ} = \frac{حـ}{ء-حـ}$
∴ ٣ س + ٩ص = ٨س − ٤ ص	∴ أ (ء − حـ) = حـ(ب − أ)
∴ ٩ص + ٤ ص = ٨س − ٣س	⟸ أ ء − $\cancel{أ حـ}$ = حـ ب − $\cancel{حـ أ}$
∴ ١٣ص = ٥س	∴ أ × ء = حـ × ب ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$
⟸ $\boxed{\frac{ص}{س} = \frac{٥}{١٣}}$	∴ أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

خاصية (٢)

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ **فإن** : $\frac{أ}{حـ} = \frac{ب}{ء}$

فمثلاً : إذا كان : $\frac{أ}{٧} = \frac{ب}{٢١}$ فـإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٢١} = \frac{١}{٣}$

مثال ٥ : أكمل ما يأتي :

① إذا كانت: ٲ ، ٢س ، ٣ب ، ٤س كميات متناسبة فإن: $\frac{ٲ}{ب}$ = ...	② إذا كان: $\frac{٣ٲ}{٥ب} = \frac{١}{٢}$ فإن: $\frac{ٲ}{ب}$ = ...
(الحل) ∴ $\frac{ٲ}{٢س} = \frac{٣ب}{٤س} \Longleftarrow \frac{ٲ}{ب} = \frac{٣ \times ٢س}{٤س} = \boxed{\frac{٣}{٢}}$	**(الحل)** ∴ $\frac{٣ٲ}{٥ب} = \frac{١}{٢}$ $\Longleftarrow \frac{ٲ}{ب} = \frac{١ \times ٥}{٢ \times ٣} = \boxed{\frac{٥}{٦}}$

خاصية (٣) إذا كان : $\frac{ٲ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ **فإن** : ٲ = ٣م ، ب = ٥م حيث م ≠ صفر

مثال ٦ : أكمل ما يأتي :

① إذا كان : $\frac{ٲ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ أوجد قيمة: $\frac{ب-ٲ}{ب+ٲ}$	② إذا كان : ٣س = ٢ص أوجد قيمة: $\frac{٢س+ص}{س+٤ص}$
(الحل) ∵ $\frac{ٲ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ ∴ ٲ = ٢م ، ب = ٥م ∴ $\frac{ب-ٲ}{ب+ٲ} = \frac{٥م-٢م}{٥م+٢م} = \frac{٣م}{٧م} = \boxed{\frac{٣}{٧}}$	**(الحل)** ∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ ∴ س = ٢م ، ص = ٣م ∴ $\frac{٢س+ص}{س+٤ص} = \frac{٢ \times ٢م+٣م}{٢م+٤ \times ٣م} = \frac{٧م}{١٤م} = \boxed{\frac{١}{٢}}$

==

تمارين (٧)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
① نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها (ل) سم إلى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها (٢ل) سم كنسبة	[١:٢ ، ل:٤ ، ٤:١ ، ١:٤]
② الأول المتناسب للأعداد ٢١ ، ١٥ ، ٣٥ هو	[$\frac{٣}{٧}$ ، ٣ ، ٧ ، ٩]
③ الثاني المتناسب للأعداد ٢٤ ، ٦ ، ٣ هو	[٩ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤]
④ إذا كانت: ٢ ، ٣ ، س ، ٩ كميات متناسبة فإن: س = ...	[٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٨]
⑤ إذا كانت: ٢١ ، ١٥ ، ٣٥ ، س كميات متناسبة فإن: س = ...	[٩ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٥]
⑥ إذا كان: ٣ٲ = −٤ب فإن: $\frac{ٲ}{ب}$ = ...	[$-\frac{٤}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$]
⑦ إذا كان: $٤س^{٢} = ٩ص^{٢}$ فإن: $\frac{س}{ص}$ = ...	[$\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\pm\frac{٣}{٢}$ ، $\pm\frac{٢}{٣}$]

السؤال	الاختيارات
⑧ إذا كان: ٦أ − ٥ب = ٠ فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ...	[$\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$]
⑨ إذا كان: ٨أ = ٣ب فإن: $\frac{أ}{٢ب}$ = ...	[٢٤ ، ١٦ ، $\frac{٣}{١٦}$ ، $\frac{٨}{٣}$]
⑩ إذا كان: ٣أ = $\frac{٥}{٦}$ب فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ...	[$\frac{١٨}{٥}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٥}{١٨}$]
⑪ إذا كان: $\frac{أ+ب}{٥}$ = $\frac{أ-ب}{٣}$ فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ...	[$\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٤}$]
⑫ إذا كان: $\frac{٨}{أ}$ = $\frac{٦}{ب}$ فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ...	[٤ ، ٣ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$]
⑬ إذا كان: ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١٢ س ص فإن: $\frac{س}{ص}$ = ...	[−$\frac{٣}{٢}$ ، −$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$]
⑭ إذا كانت: أ ، س ، ب ، ٢س كميات متناسبة فإن: أ : ب = ...	[٢ : ١ ، ١ : ٢ ، ١ : ٣ ، ١ : ٤]
⑮ إذا كانت: ٥أ ، ٢ ، ٣ب ، ٧ كميات متناسبة فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ...	[$\frac{٣}{٧}$ ، $\frac{٦}{٣٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٢}$]
⑯ إذا كان: $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{٥}{٣}$ فإن: $\frac{٣أ}{٥ب}$ = ...	[١ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ٣ ، ١٥]
⑰ ٦س = ٨ص فإن: ٣س − ٤ص + ٧ = ...	[٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧]
⑱ إذا كانت: $\frac{س}{ص}$ = $\frac{ع}{ل}$ فأي مما يأتي صحيح .... ؟	[$\frac{س}{ل}$ = $\frac{ص}{ع}$ ، $\frac{س}{ع}$ = $\frac{ل}{ص}$ ، $\frac{س}{ص}$ = $\frac{ل}{ع}$ ، $\frac{س}{ع}$ = $\frac{ص}{ل}$]

٢ تمارين على خاصية (١) :

① إذا كان : $\frac{س+٢ص}{٣س-٢ص}$ = $\frac{٣}{٢}$ أوجد قيمة : $\frac{س}{ص}$	② إذا كان: $\frac{س-٢ص}{س+٣ص}$ = $\frac{١}{٣}$ أوجد قيمة: $\frac{ص}{س}$

٣ تمارين على خاصية (٣) :

① إذا كان: $\frac{س}{ص}$ = $\frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة: $\frac{س+ص}{ص}$	② إذا كان: $\frac{س}{ص}$ = $\frac{١}{٢}$ أوجد قيمة: $\frac{٢س+ص}{ص-س}$
③ إذا كان: $\frac{س}{ص}$ = $\frac{١}{٥}$ أوجد قيمة: $\frac{٢س+ص}{س+٤ص}$	④ إذا كان: أ : ب = ٢ : ٥ أوجد قيمة: $\frac{٧أ-٢ب}{٣أ+٢ب}$

⑤ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{3}{5}$ أوجد قيمة: ٧أ + ٩ب : ٤أ + ٢ب	⑥ إذا كان : ٣أ = ٢ب **أوجد قيمة**: $\frac{3أ - ب}{2أ + ب}$
⑦ إذا كان : ٥أ = ٢ب **أوجد قيمة**: $\frac{3أ + 2ب}{4أ + 5ب}$	⑧ إذا كان : ٣س = ٢ص **أوجد قيمة**: $\frac{3س + 2ص}{6ص - س}$
⑨ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{ح}{ء} = \frac{5}{8}$ **أوجد قيمة**: $\frac{4أ ح - ب ء}{3أ ح + ب ء}$	
⑩ إذا كان: $\frac{21س + أ}{7س + ب} = \frac{أ}{ب}$ ، س ≠ ٠ **أوجد قيمة**: $\frac{أ + 2ب}{2أ}$	

٤ تمارين متنوعة :

① **أوجد العدد** الذي إذا **أضيف** إلى كل من الأعداد: **٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢** فإنها تكون متناسبة
② **أوجد العدد** الذي إذا **أضيف** إلى كل من الأعداد: **٧ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥** فإنها تكون متناسبة
③ **أوجد العدد** الذي إذا **طرح** إلى كل من الأعداد: **١٦ ، ٢١ ، ١٤ ، ١٨** فإنها تكون متناسبة
④ **إذا كانت:** س ، ص ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة **أوجد قيمة**: $\frac{س + ص}{5س - ص}$
⑤ **إذا كانت:** أ − ١ ، ب − ٢ ، أ + ١ ، ب + ٢ كميات متناسبة **أوجد قيمة**: أ : ب
⑥ إذا كان: $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{ح + ء}{ء}$ **أثبت أن**: أ ، ب ، ح ، ء **كميات متناسبة**
⑦ إذا كان: $\frac{أ - ب}{أ + ب} = \frac{ح - ء}{ح + ء}$ **أثبت أن**: أ ، ب ، ح ، ء **كميات متناسبة**
⑧ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{س}{ص} = \frac{3}{5}$ **أثبت أن**: (٢أ س + ب ص) ، (٥ب س − ٢أ ص) ، ٨ ، ١٠ **كميات متناسبة**

تابع / خواص التناسب

خاصية (٤)

إذا كان : ٱ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، ..... ، ..... ، ..... **كميات متناسبة**

فإن : $\frac{ٱ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ... = م$ ⟸ ٱ = ب م ، حـ = ء م ، هـ = و م ، **وهكذا** .....

مثال ١ :

① إذا كان: $\frac{ٱ}{٤} = \frac{ب}{٥} = \frac{حـ}{٣}$

أوجد قيمة : $\frac{ٱ - ب + حـ}{ٱ + ب - حـ}$

(الحل) ∵ ٱ = ٤ م ، ب = ٥ م ، حـ = ٣ م

∴ $\frac{ٱ - ب + حـ}{ٱ + ب - حـ} = \frac{٤م - ٥م + ٣م}{٤م + ٥م - ٣م} = \frac{٢م}{٦م} = \boxed{\frac{١}{٣}}$

② إذا كان: $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$

أثبت أن: $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{١}{٢}$

(الحل) ∵ س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م

∴ $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{٢ \times ٤م - ٥م}{٣ \times ٣م - ٢ \times ٤م + ٥م} = \frac{٣م}{٦م} = \boxed{\frac{١}{٢}}$

مثال ٢ : إذا كان : ٱ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة أثبت أن :

① $\frac{ٱ + ٢حـ}{ب + ٢ء} = \frac{حـ - ٱ}{ء - ب}$

(الحل) ∵ ٱ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

∴ $\frac{ٱ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = م$ ⟸ ٱ = ب م ، حـ = ء م

∴ الطرف الأيمن $= \frac{ب م + ٢ء م}{ب + ٢ء} = \frac{م(ب + ٢ء)}{ب + ٢ء} = \boxed{م}$

، الطرف الأيسر $= \frac{ء م - ب م}{ء - ب} = \frac{م(ء - ب)}{ء - ب} = \boxed{م}$

∴ الطرفان متساويان

② $\frac{ٱ}{ب - ٱ} = \frac{حـ}{ء - حـ}$

(الحل) ∵ ٱ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

∴ $\frac{ٱ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = م$ ⟸ ٱ = ب م ، حـ = ء م

∴ الطرف الأيمن $= \frac{ب م}{ب - ب م} = \frac{ب م}{ب(١ - م)} = \boxed{\frac{م}{١ - م}}$

، الطرف الأيسر $= \frac{ء م}{ء - ء م} = \frac{ء م}{ء(١ - م)} = \boxed{\frac{م}{١ - م}}$

∴ الطرفان متساويان

③ $\frac{ٱ^٢ + حـ^٢}{ب^٢ + ء^٢} = \frac{ٱ حـ}{ب ء}$

(الحل)

∴ الطرف الأيمن $= \frac{ب^٢م^٢ + ء^٢م^٢}{ب^٢ + ء^٢} = \frac{م^٢(ب^٢ + ء^٢)}{ب^٢ + ء^٢} = \boxed{م^٢}$

، الطرف الأيسر $= \frac{ب م \times ء م}{ب ء} = \boxed{م^٢}$

∴ الطرفان متساويان

④ $\frac{ٱ^٢ + حـ^٢}{ٱ ب + حـ ء} = \frac{ٱ}{ب}$

(الحل)

∴ الطرف الأيمن $= \frac{ب^٢م^٢ + ء^٢م^٢}{ب^٢م + ء^٢م} = \frac{م^٢(ب^٢ + ء^٢)}{م(ب^٢ + ء^٢)} = \boxed{م}$

، الطرف الأيسر $= \frac{ب م}{ب} = \boxed{م}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٣ : إذا كان : ﻫ ، ب ، جـ ، ى ، هـ ، و كميات متناسبة أثبت أن :

① $\frac{٥ﻫ - ٣جـ}{٥ب - ٣ى} = \frac{٤جـ - هـ}{٤ى - و}$

(الحل) ∵ ﻫ ، ب ، جـ ، ى ، هـ ، و كميات متناسبة

∴ $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = م$

⟸ ∵ ﻫ = ب م ، جـ = ى م ، هـ = و م

∴ الطرف الأيمن

$= \frac{٥ب م - ٣ى م}{٥ب - ٣ى}$

$= \frac{م(٥ب - ٣ى)}{٥ب - ٣ى}$

= م

، الطرف الأيسر

$= \frac{٤ى و - و م}{٤ى - و}$

$= \frac{م(٤ى - و)}{٤ى - و}$

= م

∴ الطرفان متساويان

② $\sqrt{\frac{٥ﻫ^٢ - ٧جـهـ}{٥ب^٢ - ٧ى و}} = \frac{٢ﻫ + جـ}{٢ب + ى}$

(الحل) ∵ ﻫ ، ب ، جـ ، ى ، هـ ، و كميات متناسبة

∴ $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = م$

⟸ ∵ ﻫ = ب م ، جـ = ى م ، هـ = و م

∴ الطرف الأيمن

$= \sqrt{\frac{٥ب^٢ م^٢ - ٧ى م × و م}{٥ب^٢ - ٧ى و}}$

$= \sqrt{\frac{م^٢(٥ب^٢ - ٧ى و)}{٥ب^٢ - ٧ى و}}$

$= \sqrt{م^٢} = م$

، الطرف الأيسر

$= \frac{٢ب م + ى م}{٢ب + ى}$

$= \frac{م(٢ب + ى)}{٢ب + ى} = م$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٤ : أجب عما يأتي :

① إذا كان ﻫ : ب : حـ = ١ : ٢ : ٣

، وكان ب + حـ = ٢٥

أوجد قيمة كل من: ﻫ ، ب ، حـ

(الحل) ∵ ﻫ = م ، ب = ٢ م ، حـ = ٣ م

∴ ب + حـ = ٢م + ٣م = ٢٥

∴ ٥م = ٢٥ (÷٥)

⟸ ∴ م = ٥

∴ ﻫ = ٥ ، ب = ٢ × ٥ = ١٠

، حـ = ٣ × ٥ = ١٥

② إذا كان ﻫ : ب = ٢ : ٣ ، ب : حـ = ٢ : ٥

، وكان ٣ﻫ + ب - حـ = ٩

أوجد قيمة كل من : ﻫ ، ب ، حـ

(الحل) ∵ ﻫ : ب : حـ

٢ : ٣

٢ : ٥

٤ : ٦ : ١٥

∵ ﻫ = ٤ م ، ب = ٦ م ، حـ = ١٥ م

∴ ٣ × ٤م + ٦م − ١٥م = ٩

∴ ٣م = ٩ (÷٣) ⟸ ∴ م = ٣

∴ ﻫ = ١٢ ، ب = ١٨ ، حـ = ٤٥

خاصية (٥)

إذا كان : $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{حـ}{ى} = \frac{هـ}{و} = ... = م$ ،وكانت: $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ ، ...... أعداد حقيقية ≠ ٠

(١) فإن : $\frac{ﻫ + حـ}{ب + ى} = \frac{ﻫ + حـ + هـ}{ب + ى + و}$ = إحدى النسب ($\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب)

(٢) فإن : $\frac{م_١ ﻫ + م_٢ حـ + م_٣ هـ + ...}{م_١ ب + م_٢ ى + م_٣ و + ...}$ = إحدى النسب

مثال ٥ : أجب عما يأتي :

① إذا كان: $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س+ص}{ك}$

أوجد قيمة: ك

(الحل) ∵ $\frac{س+ص}{ك} = \frac{س+ص}{٥+٤} = \frac{س+ص}{٩}$

∴ **ك = ٩**

② إذا كان: $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٢} = \frac{٢أ+ب}{٤س}$

أوجد قيمة: س

(الحل) ∵ $\frac{٢أ+ب}{٤س} = \frac{٢أ+ب}{٢×٣+٢} = \frac{٢أ+ب}{٨}$

∴ ٤س = ٨ (÷٤) ⟸ **∴ س = ٢**

③ إذا كان: $\frac{٢}{أ} = \frac{ب}{٣} = \frac{حـ}{٤} = \frac{٢أ-ب+٥حـ}{٣س}$ أوجد قيمة: س

(الحل) ∵ $\frac{٢أ-ب+٥حـ}{٣س} = \frac{٢أ-ب+٥حـ}{٢×٢-٣+٥×٤} = \frac{٢أ-ب+٥حـ}{٢١}$

∴ ٣س = ٢١ (÷٣) ⟸ **∴ س = ٧**

مثال ٦ : أجب عما يأتي :

① إذا كان: $\frac{أ}{٤س+ص} = \frac{ب}{س-٤ص}$

أثبت أن: $\frac{أ+ب}{٥س-٣ص} = \frac{أ-ب}{٣س+٥ص}$

(الحل)

بجمع النسبتين الأولي والثانية :

$\frac{أ+ب}{٤س+ص+س-٤ص} = \frac{أ+ب}{٥س-٣ص}$ = إحدى النسب ①

بطرح النسبتين الأولي والثانية :

$\frac{أ-ب}{٤س+ص-س+٤ص} = \frac{أ-ب}{٣س+٥ص}$ = إحدى النسب ②

من ① ، ② ينتج أن: $\frac{أ+ب}{٥س-٣ص} = \frac{أ-ب}{٣س+٥ص}$

② إذا كان: $\frac{أ}{٢س+ص} = \frac{ب}{٣ص-س} = \frac{حـ}{٤س+٥ص}$

أثبت أن: $\frac{أ+٢ب}{٧} = \frac{٤ب+حـ}{١٧}$

(الحل)

بضرب النسبة الثانية (×٢) وجمعها مع الأولي :

$\frac{أ+٢ب}{٢س+ص+٦ص-٢س} = \frac{أ+٢ب}{٧ص}$ = إحدى النسب ①

بضرب الثانية في (٤) والجمع مع الثالثة :

$\frac{٤ب+حـ}{١٢ص-٤س+٤س+٥ص} = \frac{٤ب+حـ}{١٧ص}$ = إحدى النسب ②

من ① ، ② ينتج أن: $\frac{أ+٢ب}{٧ص} = \frac{٤ب+حـ}{١٧ص}$

⟸ $\frac{أ+٢ب}{٧} = \frac{٤ب+حـ}{١٧}$

③ إذا كان: $\frac{س+ص}{٧} = \frac{ص+ع}{٥} = \frac{ع+س}{٨}$ أثبت أن: $\frac{س+ص+ع}{س-ع} = ٥$

(الحل) بجمع النسب الثلاثة :

$\frac{س+ص+ص+ع+ع+س}{٧+٥+٨} = \frac{٢س+٢ص+٢ع}{٢٠} = \frac{٢(س+ص+ع)}{٢٠} = \frac{س+ص+ع}{١٠}$ = إحدى النسب ①

بجمع الأولي والثانية (× -١) : $\frac{س+ص-ص-ع}{٧-٥} = \frac{س-ع}{٢}$ = إحدى النسب ②

من ① ، ② ينتج أن: $\frac{س+ص+ع}{١٠} = \frac{س-ع}{٢}$ ⟸ $\frac{س+ص+ع}{س-ع} = ٥$

تمارين (٨)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

اختر	الأسئلة
[$\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٥}$]	① إذا كان: $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣}$ فإن: $\frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ب}+\text{أ}} =$ ....
[٣ ، ٧ ، ٥ ، ٢]	② إذا كان: $\frac{\text{أ}}{٥} = \frac{\text{ب}}{٧}$ فإن: ٧أ - ٥ب + ٣ = ...
[-٢ ، ٢ ، ٨ ، ١٥]	③ إذا كان: $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{\text{س}-\text{ص}}{\text{أ}}$ فإن: أ = ...
[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]	④ إذا كان: $\frac{\text{أ}}{١٢} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{أ}-٢\text{ب}}{\text{ك}}$ فإن: ك = ...
[٣ ، ٥ ، ٦ ، ١٣]	⑤ إذا كان: $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{٢\text{س}+٣\text{ص}}{\text{م}}$ فإن: م = ...
[-٢ ، ٢ ، -$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$]	⑥ إذا كان: $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{٤\text{س}-٢\text{ص}}{\text{ع}}$ فإن: ع = ...
[٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٥]	⑦ إذا كان: $\frac{\text{س}}{٨} = \frac{\text{ص}}{٧} = \frac{\text{س}+\text{ص}}{٣\text{ك}}$ فإن: ك = ...
[٥:٧ ، ٣:٢ ، ١:٢ ، ٢:١]	⑧ إذا كان: أ : ب = ٣ : ٤ ، ب : ح = ٢ : ٣ فإن: أ : ح = ...
[٢:٣:٤ ، ٤:٣:٢ ، ٦:٤:٣ ، ٣:٤:٦]	⑨ إذا كان: ٢أ = ٣ب = ٤ح فإن: أ : ب : ح = ...

٢ تمارين على خاصية (٤) :

① إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٣} = \frac{\text{ب}}{٥}$ أوجد قيمة: $\frac{٧\text{أ}+٩\text{ب}}{٤\text{أ}+٣\text{ب}}$	② إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٧} = \frac{\text{ح}}{٣}$ أوجد قيمة: $\frac{\text{أ}+٢\text{ب}}{\text{ب}-\text{ح}}$
③ إذا كان : $\frac{\text{س}}{٤} = \frac{\text{ص}}{٥} = \frac{\text{ع}}{٢}$ أوجد قيمة: $\frac{\text{س}-\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}+\text{ص}-\text{ع}}$	④ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٤} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{ح}}{٧}$ أثبت أن: $\frac{\text{أ}-\text{ب}+\text{ح}}{\text{أ}+\text{ب}-\text{ح}} = ٣$
⑤ إذا كان : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ أثبت أن: س - ٢ص + ع = صفر	⑥ إذا كان : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ أثبت أن: $\sqrt{٣\text{س}^٢+٣\text{ص}^٢+\text{ع}^٢} = ٢\text{س}+\text{ص}$
⑦ إذا كان : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ أثبت أن: $\frac{٢\text{ص}-\text{ع}}{٣\text{س}-٢\text{ص}+\text{ع}} = \frac{\text{ع}-\text{ص}}{\text{ع}-\text{س}}$	⑧ إذا كان : س : ص : ع = ٥ : ٣ : ٦ أثبت أن: $\frac{٢\text{س}+\text{ص}-\text{ع}}{٧} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{٩}$

٣ إذا كان : أ ، ب ، ح ، د كميات متناسبة أثبت أن :

① $\frac{٢أ + ح}{٢ب + د} = \frac{٣أ - ح}{٣ب - د}$ ② $\frac{٣أ - ٢ح}{٥أ + ٣ح} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$ ③ $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{ح + د}{د}$

④ $\frac{٣أ - ٦ح}{ب - ٢د} = \frac{٣أ}{ب}$ ⑤ $\frac{أ^{٢} + ح^{٢}}{أب + حد} = \frac{أ + ح}{ب + د}$ ⑥ $\left(\frac{أ - ح}{ب - د}\right)^{٢} = \frac{أح}{بد}$

---

٤ إذا كان : أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و كميات متناسبة أثبت أن :

① $\frac{أ + ٥ح}{ب + ٥د} = \frac{ح - ٣هـ}{د - ٣و}$ ② $\frac{٢أ + ٧ح - ٤هـ}{٢ب + ٧د - ٤و} = \frac{أ - ٢هـ}{ب - ٢و}$ ③ $\sqrt[٣]{\frac{أ^{٣} - ح^{٢}هـ}{ب^{٣} - د^{٢}و}} = \frac{هـ}{و}$

---

٥ تمارين متنوعة :

① إذا كان أ : ب : ح = ٥ : ٧ : ٣ ، وكان أ + ب = ٣٦ أوجد قيمة: أ ، ب ، ح
② إذا كان أ : ب : ح = ١ : ٣ : ٩ ، وكان أ + ب + ح = ٢٦ أوجد قيمة: أ ، ب ، ح
③ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{ح} = \frac{٣}{٥}$ ، وكان أ + ب + ح = ٧٥ أوجد قيمة: أ ، ب ، ح

---

٦ تمارين على خاصية (٥) :

① إذا كان: $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ص - س}{٥ك}$	أوجد قيمة: ك
② إذا كان: $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{ح}{٥} = \frac{٣ح + ب - ٢أ}{س}$	أوجد قيمة: س
③ إذا كان : $\frac{أ}{س + ص} = \frac{ب}{ص - ٢س} = \frac{ح}{س + ٤ص}$	أوجد قيمة: $\frac{ب + ٢ح}{٢أ + ب}$
④ إذا كان: $\frac{أ}{٣س + ص} = \frac{ب}{س - ٣ص}$	أثبت أن: $\frac{أ + ب}{٤س - ٢ص} = \frac{أ - ب}{٢س + ٤ص}$
⑤ إذا كان: $\frac{س}{أ - ب + ح} = \frac{ص}{ب - ح + أ} = \frac{ع}{ح - أ + ب}$	أثبت أن: $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب}$
⑥ إذا كان: $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - ح} = \frac{ع}{٢ح - أ}$	أثبت أن: $\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - ح} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$
⑦ إذا كان: $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٣} = \frac{ع + س}{٦}$	أثبت أن: $\frac{س - ع}{٢} = \frac{س + ص + ع}{٧}$
⑧ إذا كان: $\frac{أ + ب}{٤} = \frac{ب + ح}{٥} = \frac{ح + أ}{٧}$	أثبت أن: $\frac{أ + ب + ح}{٨} = \frac{أ}{٣}$

التناسب المتسلسل

تعريف التناسب المتسلسل : إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$ فإن: أ ، ب ، ح في تناسب متسلسل

خواص التناسب : ⇩

❶ **إذا كان :** أ ، ب ، ح في تناسب متسلسل **فإن :** $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$

ويُسمي : أ بالأول المتناسب ، ب بالوسط المتناسب ، ح بالثالث المتناسب

ملاحظة هامة : الكميتين " أ ، ح " يجب أن تكون موجبتين معاً أو سالبتين معاً (لهما نفس الإشارة)

❷ **إذا كان :** $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$ **فإن :** $ب^2 = أ ح \Longleftarrow ب = \pm \sqrt{أ ح}$

أي أن : الوسط المتناسب بين عددين = $\pm \sqrt{\text{العدد الأول} \times \text{العدد الثالث}}$

❸ **إذا كان :** أ ، ب ، ح في تناسب متسلسل

فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م \Longleftarrow$ ب = ح م ، أ = ح $م^2$

❹ **إذا كان :** أ ، ب ، ح ، ء في تناسب متسلسل

فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{ء} = م \Longleftarrow$ ح = ء م ، ب = ء $م^2$ ، أ = ء $م^3$

مثال ١ : **أكمل ما يأتي :**

① الوسط المتناسب بين العددين ٤ ، ٢٥ هو .... **(الحل)** الوسط المتناسب = $\pm \sqrt{٤ \times ٢٥} = \pm ١٠$	② **إذا كانت:** ٣ ، س ، ١٢ كميات متناسبة **فإن:** س = ... **(الحل)** س = $\pm \sqrt{٣ \times ١٢} = \pm ٦$
③ إذا كان العدد ٩ هو الوسط المتناسب الموجب بين العددين م ، ٢٧ فإن: م = ... **(الحل)** ∵ م ، ٩ ، ٢٧ في تناسب متسلسل ∴ $\frac{م}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$ $\Longleftarrow م = \frac{٩ \times ٩}{٢٧} = ٣$	④ الثالث المتناسب بين العددين ٩ ، ٦ هو .... **(الحل)** نفرض أن : الثالث المتناسب هو س ∴ ٩ ، ٦ ، س في تناسب متسلسل ∴ $\frac{٩}{٦} = \frac{٦}{س}$ $\Longleftarrow م = \frac{٦ \times ٦}{٩} = ٤$

⑤ **إذا كانت:** ٣ ، س ، $\frac{١}{ص}$ كميات متناسبة **فإن:** $س^٢ ص =$ ....

(الحل) ∴ $س^٢ = ٣ \times \frac{١}{ص} \Longleftarrow س^٢ ص = ٣$

مثال ٢ : إذا كان : ب وسطاً متناسب بين ؟ ، حـ أثبت أن :

① $\frac{أ}{أ+ب} = \frac{ب}{ب+حـ}$

(الحل) ∵ أ ، ب ، حـ في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = م \Longleftarrow ب = حـ م ، أ = حـ م^٢$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{حـ م^٢}{حـ م^٢ + حـ م} = \frac{حـ م^٢}{حـ م (م+١)} = \frac{م}{م+١}$

، الطرف الأيسر $= \frac{حـ م}{حـ م + حـ} = \frac{حـ م}{حـ (م+١)} = \frac{م}{م+١}$

∴ الطرفان متساويان

② $\frac{أ^٢+ب^٢}{ب^٢+حـ^٢} = \frac{أ}{حـ}$

(الحل) ∵ أ ، ب ، حـ في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = م \Longleftarrow ب = حـ م ، أ = حـ م^٢$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{حـ^٢ م^٤ + حـ^٢ م^٢}{حـ^٢ م^٢ + حـ^٢} = \frac{حـ^٢ م^٢ (م^٢+١)}{حـ^٢ (م^٢+١)} = م^٢$

، الطرف الأيسر $= \frac{حـ م^٢}{حـ} = م^٢$

∴ الطرفان متساويان

③ $\frac{ب^٢-حـ^٢}{أ-حـ} = \frac{ب^٢}{أ}$

(الحل)

∴ الطرف الأيمن $= \frac{حـ^٢ م^٢ - حـ^٢}{حـ م^٢ - حـ} = \frac{حـ^٢ (م^٢-١)}{حـ (م^٢-١)} = حـ$

، الطرف الأيسر $= \frac{حـ^٢ م^٢}{حـ م^٢} = حـ$

∴ الطرفان متساويان

④ $\frac{٣جـ^٢ - ٥ب^٢}{٣ب^٢ - ٥أ^٢} = \frac{جـ^٢}{ب^٢}$

(الحل)

∴ الطرف الأيمن $= \frac{٣جـ^٢ - ٥جـ^٢ م^٢}{٣جـ^٢ م^٢ - ٥جـ^٢ م^٤} = \frac{جـ^٢ (٣-٥م^٢)}{جـ^٢ م^٢ (٣-٥م^٢)} = \frac{١}{م^٢}$

، الطرف الأيسر $= \frac{جـ^٢}{جـ^٢ م^٢} = \frac{١}{م^٢}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٣ : إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء في تناسب متسلسل أثبت أن :

① $\frac{حـ^٢-ء^٢}{أ-حـ} = \frac{بء}{أ}$

(الحل) ∵ أ ، ب ، حـ ، ء في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

$\Longleftarrow حـ = ء م ، ب = ء م^٢ ، أ = ء م^٣$

② $\left(\frac{أ+ب}{ب+حـ}\right)^٣ = \frac{أ}{ء}$

(الحل) ∵ أ ، ب ، حـ ، ء في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

$\Longleftarrow حـ = ء م ، ب = ء م^٢ ، أ = ء م^٣$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{ء^2م^2-ء^2}{ءم^3-ءم}$ ، الطرف الأيسر $= \frac{ء^2م^2}{ءم^3}$

$= \frac{ء^2(م^2-1)}{ءم(م^2-1)} = \boxed{\frac{ء}{م}}$ ، $= \boxed{\frac{ء}{م}}$

∴ الطرفان متساويان

∴ الطرف الأيمن $= \left(\frac{ءم^3+ءم^2}{ءم^2+ءم}\right)^3$ ، الطرف الأيسر $= \frac{ءم^3}{ء}$

$= \left[\frac{ءم^2(م+1)}{ءم(م+1)}\right]^3 = \boxed{م^3}$ ، $= \boxed{م^3}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٤ : أمثلة متنوعة :

① **إذا كان:** $\frac{2أ-ب}{2ب-حـ} = \frac{ب}{حـ}$

أثبت أن: ب وسطاً متناسب بين أ ، حـ

(الحل) ∵ $\frac{2أ-ب}{2ب-حـ} = \frac{ب}{حـ}$

∴ $حـ(2أ-ب) = ب(2ب-حـ)$

∴ $2أحـ - حـب = 2ب^2 - بحـ$

∴ $2أحـ = 2ب^2 \Longleftarrow \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ}$

∴ **ب وسطاً متناسب بين أ ، حـ**

② **أوجد العدد** الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد : ١ ، ٧ ، ٢٥ فإنها تكون في تناسباً متسلسلاً

(الحل) نفرض أن : العدد هو س

∴ الأعداد هي س+١ ، س+٧ ، س+٢٥

∴ $\frac{س+1}{س+7} = \frac{س+7}{س+25}$

∴ $(س+1)(س+25) = (س+7)(س+7)$

∴ $س^2 + 26س + 25 = س^2 + 14س + 49$

∴ $26س - 14س = 49 - 25$

∴ $12س = 24 \quad (\div 12) \Longleftarrow س = \boxed{2}$

∴ **العدد المطلوب هو ٢**

تمارين (٩)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
① الوسط المتناسب الموجب بين ١ ، ١٦ هو	[١ ، ٤ ، ١٦ ، ٨]
② **إذا كانت:** ١ ، س ، ٤ كميات متناسبة **فإن:** س = ...	[±١ ، ±٢ ، ±٣ ، ±٤]
③ إذا كان العدد ٨ هو الوسط المتناسب الموجب بين العددين م ، ١٦ **فإن:** م = ...	[٢ ، ٤ ، ٨ ، $\frac{1}{2}$]
④ **إذا كانت:** ٢ ، ٦ ، س+١٥ كميات متناسبة **فإن:** س = ...	[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]
⑤ **إذا كانت:** أ ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل **فإن:** أ + ب = ...	[٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩]
⑥ **إذا كانت:** ٧ ، س ، $\frac{1}{ص}$ في تناسب متسلسل **فإن:** $س^2$ ص = ...	[٢ ، ٤ ، ٧ ، ١٤]

⑦ العدد الذي إذا أضيف لكل من الأعداد: ١ ، ٣ ، ٦ تصبح في تناسب متسلسل هو	[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]
⑧ العدد الذي إذا أضيف لكل من الأعداد: ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٥ تصبح في تناسب متسلسل هو	[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]
⑨ إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{٢}$ فإن: $\frac{\text{أ}}{\text{د}} =$	[٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦]
⑩ إذا كانت: س ، ص ، ع في تناسب متسلسل فإن: $\frac{\text{س}}{\text{ع}} =$	[$\frac{\text{ع}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}}$ ، $\frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{ع}^{\text{٢}}}$ ، $\frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، $(\text{ص ع})^{\text{٢}}$]

٢ إذا كان: ب وسطاً متناسب بين أ ، جـ أثبت أن:

① $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}}$

② $\frac{\text{٥أ} - \text{٣ب}}{\text{٥ب} - \text{٣جـ}} = \frac{\text{أ} + \text{٢ب}}{\text{ب} + \text{٢جـ}}$

③ $\frac{\text{أ}}{\text{ب} + \text{٢أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ} + \text{٢ب}}$

④ $\frac{\text{٣أ}^{\text{٢}} - \text{٢ب}^{\text{٢}}}{\text{٣ب}^{\text{٢}} - \text{٢جـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

⑤ $\frac{\text{٥جـ}^{\text{٢}} - \text{٢ب}^{\text{٢}}}{\text{٥ب}^{\text{٢}} - \text{٢أ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

⑥ $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \frac{\text{ب}^{\text{٢}} + \text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}}$

⑦ $\frac{\text{أ}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} + \frac{\text{ب}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢أ}}{\text{جـ}}$

⑧ $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}}$

⑨ $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ}^{-\text{١}} + \text{ب}^{-\text{١}} + \text{جـ}^{-\text{١}}} = \text{ب}^{\text{٢}}$

٣ إذا كان: ص وسطاً متناسب بين س ، ع أثبت أن:

① $\frac{\text{س ع}}{\text{ص}(\text{ص} + \text{ع})} = \frac{\text{س}}{\text{س} + \text{ص}}$

② $\frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{ص}^{\text{٣}}}{\text{ص}^{\text{٣}} + \text{ع}^{\text{٣}}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س ع}}$

٤ إذا كان: أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل أثبت أن:

① $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} - \text{٣جـ}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{٣د}^{\text{٢}}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

② $\frac{\text{جـ}^{\text{٢}} + \text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د}^{\text{٢}} + \text{جـ}}{\text{د}}$

③ $\frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{جـ}}$

④ $\frac{\text{أب} - \text{جـد}}{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{جـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$

٥ تمارين متنوعة:

① إذا كان: أ ، ٣ ، ٩ ، ب في تناسب متسلسل **أوجد قيمة كل من:** أ ، ب

② إذا كان: ١ ، س ، ٩ ، ص في تناسب متسلسل **أوجد قيمة كل من:** س ، ص

③ **احسب الوسط المتناسب الموجب بين:** $(\text{٤أ}^{\text{٢}} - \text{٢٠ب}^{\text{٢}})$ ، $\frac{\text{٢٥أ}^{\text{٢}}\text{ب}^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}} - \text{٥ب}^{\text{٢}}}$

④ إذا كان: $\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \frac{\text{ب}^{\text{٢}} + \text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{جـ}^{\text{٢}}}$ **أثبت أن:** ب وسطاً متناسب بين أ ، جـ

التغير الطردي والتغير العكسي

أولاً : التغير الطردي

يقال إن ص تتغير طرديًا مع س

وتكتب : ص $\propto$ س

خواص التغير الطردي : ⇩

❶ إذا كانت: ص $\propto$ س

فإن: ص = م س ⟸ $\frac{ص}{س}$ = م

حيث م ثابت ≠ صفر

(تستخدم هذه الخاصية عند إيجاد العلاقة بين س ، ص)

❷ إذا كانت: ص $\propto$ س فإن: $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

(تستخدم هذه الخاصية عند وجود قيم لـ س ، لـ ص)

ملاحظة : لإثبات أن: ص $\propto$ س

يجب إثبات أن: ص = عدد × س ، $\frac{ص}{س}$ = عدد

ثانياً : التغير العكسي

يقال إن ص تتغير عكسيًا مع س

وتكتب : ص $\propto \frac{١}{س}$

خواص التغير العكسي : ⇩

❶ إذا كانت: ص $\propto \frac{١}{س}$

فإن: ص = $\frac{م}{س}$ ⟸ س ص = م

حيث م ثابت ≠ صفر

(تستخدم هذه الخاصية عند إيجاد العلاقة بين س ، ص)

❷ إذا كانت: ص $\propto \frac{١}{س}$ فإن: $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

(تستخدم هذه الخاصية عند وجود قيم لـ س ، لـ ص)

ملاحظة : لإثبات أن: ص $\propto \frac{١}{س}$

يجب إثبات أن: ص = $\frac{عدد}{س}$ ، س ص = عدد

مثال ١ : أمثلة على التغير الطردي :

① إذا كانت: ص $\propto$ س وكانت ص = ١٥ عندما س = ٣

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص

(٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٨

(الحل) ∵ ص $\propto$ س ∴ ص = م س

∵ ص = ١٥ ، س = ٣ ∴ ١٥ = م × ٣ (÷٣)

⟸ م = ٥ ∴ العلاقة هي: ص = ٥ س

عندما س = ٨ ∴ ص = ٥ × ٨ = ٤٠

② إذا كانت: ص $\propto$ س وكانت ص = ١٠ عندما س = ٧

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص

(٢) أوجد قيمة س عندما ص = ٢٠

(الحل) ∵ ص $\propto$ س ∴ ص = م س

∵ ص = ١٠ ، س = ٧ ∴ ١٠ = م × ٧ (÷٧)

⟸ م = $\frac{١٠}{٧}$ ∴ العلاقة هي: ص = $\frac{١٠}{٧}$ س

عندما ص = ٢٠ ∴ ٢٠ = $\frac{١٠}{٧}$ × س (× $\frac{٧}{١٠}$)

∴ س = ٢٠ × $\frac{٧}{١٠}$ = ١٤

مثال ٢ : **أمثلة على التغير العكسي :**

① إذا كانت: ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ١٠ عندما س = ٣

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص

(٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٥

(الحل) ∵ ص $\propto \frac{1}{س}$ ∴ س ص = م

∵ ص = ١٠ ، س = ٣ ∴ م = ٣ × ١٠

⟸ م = ٣٠ ∴ العلاقة هي: س ص = ٣٠

عندما س = ٥ ∴ س × ٥ = ٣٠ (÷٥)

∴ س = ٦

② إذا كانت: ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٦ عندما س = ٢

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص

(٢) أوجد قيمة س عندما ص = $\frac{3}{4}$

(الحل) ∵ ص $\propto \frac{1}{س}$ ∴ س ص = م

∵ ص = ٦ ، س = ٢ ∴ م = ٢ × ٦

⟸ م = ١٢ ∴ العلاقة هي: س ص = ١٢

عندما ص = $\frac{3}{4}$ ∴ س × $\frac{3}{4}$ = ١٢ (× $\frac{4}{3}$)

∴ س = ١٦

مثال ٣ :

① إذا كانت: ص $\propto$ س وكانت ص = ١ عندما س = ٤

أوجد قيمة س عندما ص = ٨

(الحل) ∵ ص $\propto$ س

∴ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ ⟸ $\frac{1}{8} = \frac{4}{س}$

∴ س = $\frac{4 \times 8}{1}$ = ٣٢

② إذا كانت: ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٨ عندما س = ٣

أوجد قيمة ص عندما س = ٤

(الحل) ∵ ص $\propto \frac{1}{س}$

∴ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$ ⟸ $\frac{8}{ص} = \frac{4}{3}$

∴ ص = $\frac{8 \times 3}{4}$ = ٦

مثال ٤ : **أمثلة على الإثبات :**

① إذا كان: $أ^2 + 4 ب^4 = 4 أ ب^2$

أثبت أن : أ $\propto$ $ب^2$

(الحل) ∵ $أ^2 - 4 أ ب^2 + 4 ب^4 = 0$

∴ $(أ - 2 ب^2)^2 = 0$

∴ أ = ٢ $ب^2$

∴ أ $\propto$ $ب^2$

② إذا كان: $س^2 ص^2 - 6 س ص + 9 = 0$

أثبت أن : ص تتغير عكسيًا مع س

(الحل) ∵ $س^2 ص^2 - 6 س ص + 9 = 0$

∴ $(س ص - 3)^2 = 0$

∴ س ص = ٣

∴ ص $\propto \frac{1}{س}$

③ إذا كان: $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ أثبت أن : ص تتغير طرديًا مع ع

(الحل) ∴ ص(٧س − ع) = ع(٢١س − ص)

∴ ٧س ص − ع ص = ٢١س ع − ص ع

∴ ٧س ص = ٢١س ع (÷٧س) ⟸ ص = ٣ ع

∴ **ص تتغير طرديًا مع ع**

مثال ٥ :

① إذا كانت: ص = م + ٥ ، م ∝ س

حيث م = ٦ عندما س = ٢

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص

(٢) أوجد قيمة س عندما ص = ٨

(الحل) ∵ م ∝ س ∴ م = م س

∵ م = ٦ ، س = ٢ ∴ ٦ = م × ٢ (÷٢)

⟸ م = ٣ ∴ م = ٣ س

∵ ص = م + ٥ ∴ العلاقة هي: **ص = ٣ س + ٥**

عندما ص = ٨ ∴ ٣س + ٥ = ٨

⟸ ٣س = ٣ (÷٣)

∴ **س = ١**

② إذا كانت: ص = ٣ + م ، م ∝ $\frac{١}{س}$

وكانت ص = ٥ عندما س = ١

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص

(٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٢

(الحل) ∵ م ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ م = $\frac{م}{س}$

∵ ص = ٣ + م ∴ ص = ٣ + $\frac{م}{س}$

∵ ص = ٥ ، س = ١ ∴ ٥ = ٣ + $\frac{م}{١}$

⟸ م = ٥ − ٣ ∴ م = ٢

∴ العلاقة هي: **ص = ٣ + $\frac{٢}{س}$**

عندما س = ٢ ∴ ص = ٣ + $\frac{٢}{٢}$

∴ **ص = ٤**

مثال ٦ : تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب **المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن**

فإذا سارت السيارة ٩٠ **كم في ساعتين.**

① **اكتب العلاقة بين المسافة والزمن** ② **أوجد المسافة التي قطعتها السيارة في ٣ساعات**

(الحل) نفرض أن: المسافة (ف) ، الزمن (ن) ⟸ ف ∝ ن ∴ ف = م ن

∵ ف = ٩٠ ، ن = ٢ ∴ ٩٠ = م × ٢ (÷٢) ⟸ م = ٤٥

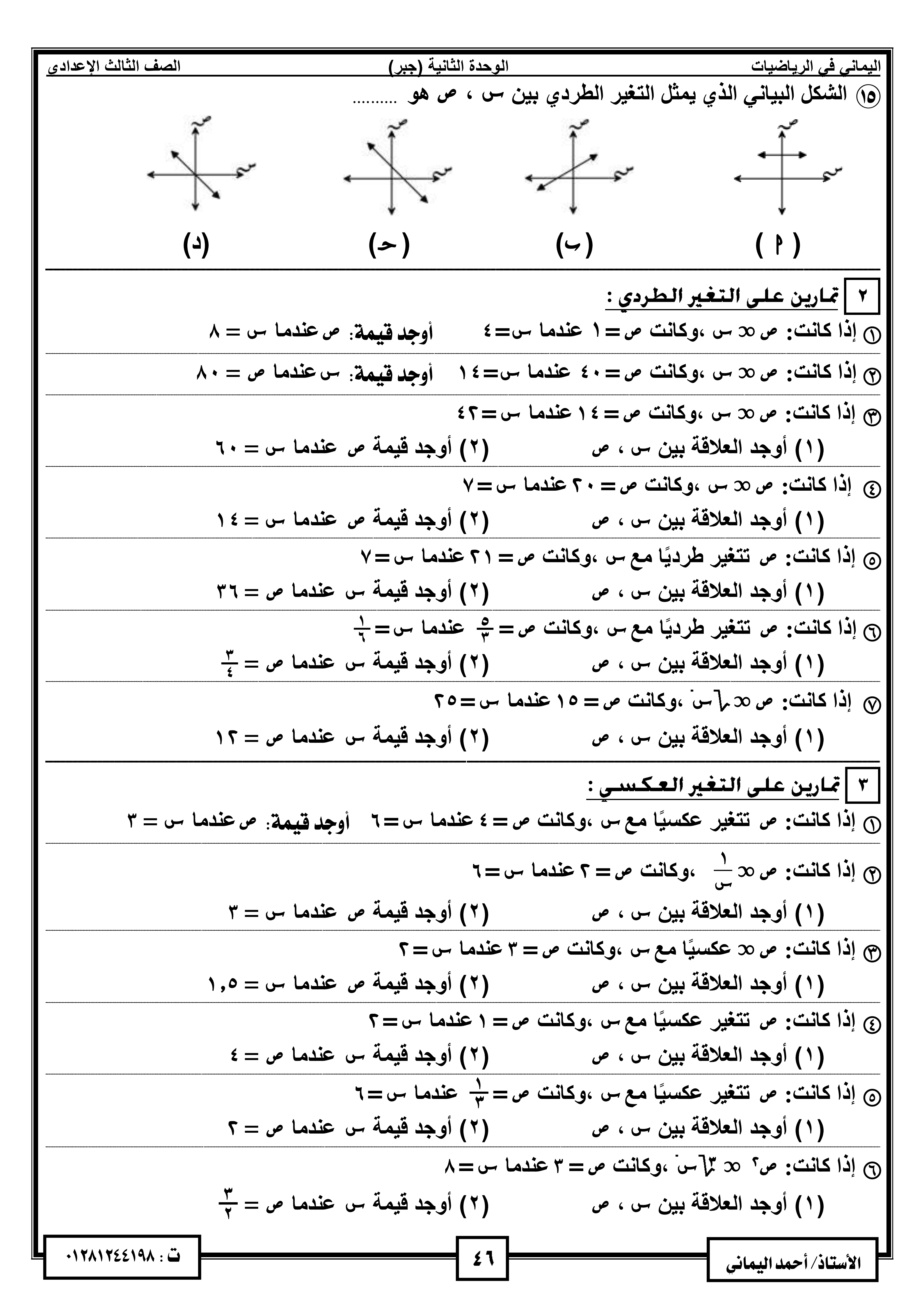
∴ العلاقة هي: **ف = ٤٥ ن** * عندما ن = ٣ ∴ ف = ٤٥ × ٣ = **١٣٥ كم**

تمارين (٩)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
① العلاقة التي تمثل تغيرًا **طرديًا** بين المتغيرين س ، ص هي	[س ص = ٧ ، ص = س + ٢ ، $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ ، $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$]
② إذا كانت: ص = $\frac{١}{٥}$ س فإن: ص ∝	[س ، س + ٥ ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{٥س}$]
③ إذا كانت: $\frac{س}{ص} = \frac{٧}{٢}$ فإن: ص ∝	[س ، $\frac{١}{س}$ ، س + $\frac{٧}{٢}$ ، س − $\frac{٧}{٢}$]
④ إذا كانت: س ص − ٧ = ٠ فإن: ص ∝	[$\frac{١}{س}$ ، $\frac{٧}{س}$ ، ٧س ، $\frac{س}{٧}$]
⑤ إذا كانت: ٢س^{٢} ص = ٥ فإن: ص ∝	[س ، س^{٢} ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]
⑥ إذا كانت: ص = $\frac{٧}{س}$ فإن: ص ∝	[$\frac{١}{س}$ ، $\frac{٧}{س}$ ، ٧س ، $\frac{س}{٧}$]
⑦ إذا كانت: ص = ٣س − ٦ فإن: ص ∝	[س ، ٣س ، س − ٢ ، ٣س + ٦]
⑧ إذا كانت: ب − أ = $\frac{١}{أ} - \frac{١}{ب}$ حيث أ ≠ ب ≠ صفر فإن: ب ∝	[أ ، أ + ١ ، $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{١}{أ^{٢}}$]
⑨ إذا كانت: ٤س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١٢س ص فإن: ص ∝	[س ، س^{٢} ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]
⑩ إذا كانت: س^{٢} ص^{٢} + س ص + $\frac{١}{٤}$ = ٠ فإن: ص ∝	[س ، س^{٢} ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]
⑪ إذا كانت: ص ∝ س ، وكانت س = ١ عندما ص = ٤ فإن: ثابت التناسب = ...	[٤ ، −٤ ، ١ ، $\frac{١}{٤}$]
⑫ إذا كانت: ص ∝ س^{٢} ،وكانت ص = ١ عندما س = ٢ فإن: ثابت التناسب = ...	[١ ، ٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٤}$]
⑬ إذا كانت: ص تتناسب عكسيًا مع س ،وكانت ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٢}$ فإن: ثابت التناسب = ...	[١ ، ٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$]
⑭ إذا كانت: ص ∝ $\frac{١}{س}$ ،وكانت ص = $\sqrt{٣}$ عندما س = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن: ثابت التناسب = ...	[$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٦ ، ٢]

⑮ **الشكل البياني الذي يمثل التغير الطردي بين س ، ص هو ....**



(أ) (ب) (حـ) (د)

---

٢ تمارين على التغير الطردي :

① إذا كانت: ص ∝ س ،وكانت ص = ١ عندما س = ٤ **أوجد قيمة**: ص عندما س = ٨

② إذا كانت: ص ∝ س ،وكانت ص = ٤٠ عندما س = ١٤ **أوجد قيمة**: س عندما ص = ٨٠

③ إذا كانت: ص ∝ س ،وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٦٠

④ إذا كانت: ص ∝ س ،وكانت ص = ٣٠ عندما س = ٧

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ١٤

⑤ إذا كانت: ص تتغير طرديًا مع س ،وكانت ص = ٢١ عندما س = ٧

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = ٣٦

⑥ إذا كانت: ص تتغير طرديًا مع س ،وكانت ص = $\frac{٥}{٣}$ عندما س = $\frac{١}{٦}$

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = $\frac{٣}{٤}$

⑦ إذا كانت: ص ∝ √س ،وكانت ص = ١٥ عندما س = ٢٥

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

---

٣ تمارين على التغير العكسي :

① إذا كانت: ص تتغير عكسيًا مع س ،وكانت ص = ٤ عندما س = ٦ **أوجد قيمة**: ص عندما س = ٣

② إذا كانت: ص ∝ $\frac{١}{س}$ ،وكانت ص = ٢ عندما س = ٦

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

③ إذا كانت: ص ∝ عكسيًا مع س ،وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ١,٥

④ إذا كانت: ص تتغير عكسيًا مع س ،وكانت ص = ١ عندما س = ٢

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = ٤

⑤ إذا كانت: ص تتغير عكسيًا مع س ،وكانت ص = $\frac{١}{٣}$ عندما س = ٦

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = ٢

⑥ إذا كانت: ص² ∝ ∛س ،وكانت ص = ٣ عندما س = ٨

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = $\frac{٣}{٢}$

٤ تمارين متنوعة :

① إذا كانت: ص = ب − ٥ ، ب تتغير طرديًا مع س ، وكانت ص = ١٩ عندما س = ٢

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ١

② إذا كانت: ص = م + ٩ ، م $\propto$ س ، وكانت ص = ٢٤ عندما م = ٥

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

③ إذا كانت: ص = م + ٨ ، م تتغير عكسيًا مع س ، وكانت م = ٢ عندما س = ٣

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة س عندما ص = ٣

④ إذا كانت: ص = م + ٥ ، م تتغير عكسيًا مع س ، وكانت ص = ٦ عندما س = ١

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٢

⑤ إذا كانت: ص = ٣ − ل ، ل $\propto \frac{١}{س}$ ، وكانت ص = ٥ عندما س = ١

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٢

⑥ إذا كانت: ص = م + ٧ ، م تتغير عكسيًا مع س^{٢} ، وكانت م = ٣ عندما س = ٢

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = $\sqrt{٣}$

⑦ إذا كانت: ص = ١ + ب ، ب تتغير عكسيًا مع مربع س ، وكانت ص = ١٧ عندما س = $\frac{١}{٢}$

(١) أوجد العلاقة بين س ، ص (٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٢

---

٣ تمارين متنوعة :

① إذا كانت: س^{٢} − ١٤ س ص + ٤٩ ص^{٢} = صفر أثبت أن : س $\propto$ ص

② إذا كانت: ٤ س^{٤} + ص^{٢} = ٤ س^{٢} ص أثبت أن : ص $\propto$ س^{٢}

③ إذا كانت: س^{٢} ص^{٢} − ٨ س ص + ١٦ = صفر أثبت أن : ص $\propto \frac{١}{س}$

④ إذا كانت: م^{٢} ب^{٤} − ١٠ م ب^{٢} + ٢٥ = صفر أثبت أن : م تتغير عكسيًا مع ب^{٢}

⑤ إذا كانت: $\frac{ص + ٣}{ص} = \frac{س + ٢}{س}$ حيث س $\neq$ ص $\neq$ صفر أثبت أن : ص $\propto$ س

⑥ من بيانات الجدول المقابل :

(١) بين نوع التغير بين ص ، س

(٢) أوجد ثابت التناسب

(٣) أوجد قيمة ص عندما بين س = ٢

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

⑦ من بيانات الجدول المقابل :

(١) بين نوع التغير بين س ، ص

(٢) أوجد ثابت التغير

(٣) أوجد قيمة ص عندما بين س = ٤,٥

س	٣	٩	١٨
ص	٦	٢	١

امتحان على الوحدة الثانية

$\frac{\quad}{15}$

١ ⇐ اختر الإجابة الصحيحة :

① إذا كانت: ص $= \frac{٢}{س}$ فإن: ص $\propto$ .... ($\frac{١}{س}$ ، $\frac{٢}{س}$ ، س ، $\frac{س}{٢}$)

② الرابع المتناسب للكميات ٦ ، ٢١ ، ١٠ هو .... (٢٥ ، ٣٥ ، ١٥ ، ٤٥)

③ إذا كان: ٤ أ − ٣ ب = ٠ فإن: $\frac{أ}{ب}$ = ... [$\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٩}{١٦}$]

④ إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ = م فإن: $\frac{أ ح هـ}{ب ء و}$ = ... (م ، ٣م ، $م^٣$ ، $٣م^٣$)

⑤ الوسط المتناسب بين $٣ أ^٣$ ب ، ٢٧ أ $ب^٣$ هو .... ($-٩أ^٢ب^٢$ ، −٩أ ب ، ± $٩أ^٢ب^٢$ ، $٩أ^٢ب^٢$)

⑥ العلاقة التي تمثل تغيرًا **طرديًا** بين المتغيرين س ، ص هي ....

(س ص = ٥ ، ص = س + ٥ ، $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ ، $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$)

---

٢ ⇐ (أ) إذا كانت أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة أثبت أن : $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{ح + ء}{ء}$

(ب) إذا كانت : ص تتغير عكسياً بتغير س وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ أوجد :

(أولاً) العلاقة بين س ، ص (ثانياً) قيمة س عندما ص = ١

---

٣ ⇐ (أ) إذا كان : ب وسطاً متناسباً بين أ ، ح أثبت أن : $\frac{٣أ - ٢ب}{٣ب - ٢ح} = \frac{أ + ٥ب}{ب + ٥ح}$

(ب) إذا كانت : ص تتغير طرديًا مع س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٣ أوجد :

قيمة ص عندما س = ٤,٥

---

٤ ⇐ (أ) إذا كان : ٣ أ = ٢ ب أوجد قيمة : $\frac{٣أ - ب}{٢أ + ب}$

(ب) إذا كانت : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٤} = \frac{٢س - ص + ٥ع}{٣ك}$ أوجد قيمة : ك

---

٥ ⇐ (أ) إذا كانت : $س^٢ - ١٢ س ص + ٣٦ص^٢ = ٠$ أثبت أن : س $\propto$ ص

(ب) أوجد العدد الموجب الذي أضيف مربعه إلى حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

التشتت

تذكر أن :

مقاييس النزعة المركزية :

❶ **المنوال لمجموعة من القيم** : هو القيمة الأكثر تكراراً .

فمثلاً : المنوال للقيم : ٥ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٧٧ هو ...... **(الحل)** ٥

❷ **الوسيط لمجموعة من القيم** : هو القيمة التي تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

فمثلاً : الوسيط للقيم : ٥ ، ٩ ، ٤ ، ٧ ، ٢ هو ......

(الحل) الترتيب: ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ∴ **الوسيط هو ٥**

❸ **الوسط الحسابي لمجموعة من القيم** = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

مثال ١ : أكمل ما يأتي :

① الوسط الحسابي للقيم : ٣ ، ٦ ، ٤ ، ٧ هو ....

(الحل) الوسط الحسابي = $\frac{٣+٦+٤+٧}{٤}$ = ٥

② الوسط الحسابي للقيم : ٧ ، ١٣ ، ١٦ ، ٩ ، ١٥ هو ....

(الحل) الوسط الحسابي = $\frac{٧+١٣+١٦+٩+١٥}{٥}$ = ١٢

③ إذا كان الوسط الحسابي للقيم: ٧ ، س ، ٩ ، ١١ هو ٨ **فإن:** س = ...

(الحل) الوسط الحسابي = $\frac{س+٢٧}{٤}$ = ٨ ⟸ س + ٢٧ = ٣٢ ∴ س = ٥

④ إذا كان الوسط الحسابي للقيم: ﺃ ، ٥ ، ٨ ، ٦ ، ٧ هو ٦ **فإن:** ﺃ = ...

(الحل) الوسط الحسابي = $\frac{ﺃ+٢٦}{٥}$ = ٦ ⟸ س + ٢٦ = ٣٠ ∴ س = ٤

⑤ إذا كان الوسط الحسابي للقيم: ٢ك ، ٣ ، ٥ هو ١٠ **فإن:** ك = ...

(الحل) الوسط الحسابي = $\frac{٢ك+٨}{٣}$ = ١٠ ⟸ ٢ك + ٨ = ٣٠ ∴ ك = ١١

التشتت : يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفردات لمجموعة من القيم

- إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيراً – يكون التشتت كبيراً – التجانس صغيراً
- إذا كان الاختلاف بين المفردات صغيراً – يكون التشتت صغيراً – التجانس كبيراً
- إذا كانت جميع القيم متساوية – يكون التشتت صفراً – التجانس تاماً.

تمارين (١٠)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

① الوسط الحسابي للقيم: ٧ ، ٢ ، ٦ ، ٩ هو............ [٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢]
② الوسط الحسابي للقيم: ٧ ، ٦ ، ٥ ، ١٣ ، ٤ هو............ [٩ ، ١٥ ، ٦ ، ٧]
③ الوسط الحسابي للقيم: ٤ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٥ ، ٣٠ هو............ [١٨ ، ٢٦ ، ١٠ ، ١٩]
④ إذا كان الوسط الحسابي للقيم: ٣ ، س ، ٥ ، ٧ هو ٦ **فإن:** س = ... [٩ ، ٣ ، ٨ ، ٦]
⑤ إذا كان الوسط الحسابي للقيم: ١٢ ، ١٧ ، ١٩ ، س ، ١٧ هو ١٥ **فإن:** س = ... [١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٥]
⑥ إذا كان الوسط الحسابي للقيم: س ، ٢س ، ٣س ، ٤س هو ٥ **فإن:** س = ... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]
⑦ أكثر المجموعات الآتية تشتتاً هي المجموعة ....   (أ) ٢٨ ، ١٧ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ٢٠ (ب) ٢٥ ، ٣٩ ، ١٩ ، ٥ ، ٢٧   (حـ) ٢٠ ، ١٩ ، ٢٩ ، ٣٧ ، ٤٣ (ء) ٣١ ، ٣٥ ، ٢٦ ، ٣٧ ، ٤١
⑧ لأي مجموعة من القيم إذا تساوت جميع المفردات **فإن التشتت يساوى** ....
⑨ إذا كان التشتت لمجموعة من القيم يساوي صفرًا **فإن** ....   (أ) الاختلاف بين المفردات يكون صغيرًا (ب) الاختلاف بين المفردات يكون كبيرًا   (حـ) جميع المفردات تكون متساوية في القيمة (ء) الوسط الحسابي لها يساوي صفرًا
⑩ اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائي تسمي بالعينة ....   [العشوائية ، العنقودية ، العمدية ، الطبقية]

مقاييس التشتت

١ - المدي : **(هوأسهل وأبسط مقاييس التشتت)**

المدي = أكبر قيمة - أصغر قيمة

فمثلاً :

① المدي للقيم: ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ هو............ **(الحل) المدي** = ٩ - ٣ = ٦

② المدي للقيم: ٧ ، ١٦ ، ١٤ ، ٥ ، ٩ هو............ **(الحل) المدي** = ١٦ - ٥ = ١١

٢ - الانحراف المعياري σ : **(هوأهم وأصدق مقاييس التشتت)**

ويعرف بأنه الجذر التربيعي الموجب لمتوسط انحرافات القيم عن وسطها الحسابي .

أولاً : الانحراف المعياري لمجموعة من القيم :

القانون : $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2}{ن}}$ حيث س ترمز إلى القيمة

، $\overline{س}$ ترمز للوسط الحسابي (وتقرأ س بار) ، ن ترمز للعدد المفردات ، مجـ ترمز للمجموع

مثال ١ : أوجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للقيم : ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحـــل : الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} = \frac{١٦+٣٢+٥+٢٠+٢٧}{٥} = \frac{١٠٠}{٥} = \boxed{٢٠}$

س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^2$
١٦	١٦-٢٠=٤	٤^2=١٦
٣٢	٣٢-٢٠=١٢	١٤٤
٥	٥-٢٠=-١٥	٢٢٥
٢٠	٢٠-٢٠=٠	٠
٢٧	٢٧-٢٠=٧	٤٩
١٠٠		٤٣٤

$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2}{ن}}$

$= \sqrt{\frac{٤٣٤}{٥}} = ٩,٣٢$

ثانياً : الانحراف المعياري لتوزيع تكراري بسيط :

القانون : $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ ك}}}$ حيث س ترمز إلى القيمة

، ك ترمز لتكرار القيمة ، مجـ ك ترمز لمجموع القيم ، $\overline{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ ك}}$

مثال ٢ : الجدول الآتي يبين درجات ١٠٠ تلميذ في أحد الامتحانات :

الدرجة	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
التكرار	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩	١٠٠

أوجد الانحراف المعياري لدرجات التلاميذ

الحـــل

نوجد الوسط الحسابي			نوجد الانحراف المعياري		
س	ك	س × ك	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})^2 \times ك$
٠	٣	٠	-٣	٩	٩×٣=٢٧
١	١٦	١٦	-٢	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	-١	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	٠	٠	٠
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
المجموع	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

$\therefore \overline{س} = \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}}$

$= ١,٤٢٨$ درجة

ثالثاً : الانحراف المعياري لتوزيع تكراري ذي مجموعات :

القانون : $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2 \times ك}{\text{مجـ } ك}}$ حيث **س** ترمز لمركز المجموعة

، **ك** ترمز لتكرار القيمة ، **مجـ ك** ترمز لمجموع التكرارات ، $\overline{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ } ك}$

تذكر أن : مركز المجموعة(س) = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$

مثال ٣ : التوزيع التكراري التالي يبين درجات ٥٠ طالبا في مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	المجموع
التكرار	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

أوجد الانحراف المعياري لدرجات التلاميذ

الحـــل

نوجد الوسط الحسابي				نوجد الانحراف المعياري		
المجموعات	التكرار (ك)	مركز المجموعة (س)	س × ك	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})^2 \times ك$
١٠ -	٢	١٥	٣٠	-٢٦	٦٧٦	١٣٥٢
٢٠ -	٨	٢٥	٢٠٠	-١٦	٢٥٦	٢٠٤٨
٣٠ -	١٠	٣٥	٣٥٠	-٦	٣٦	٣٦٠
٤٠ -	١٨	٤٥	٨١٠	٤	١٦	٢٨٨
٥٠ -	١٢	٥٥	٦٦٠	١٤	١٩٦	٢٣٥٢
المجموع	٥٠		٢٠٥٠			٦٤٠٠

$\therefore \overline{س} = \frac{٢٠٥٠}{٥٠} = ٤١$ $\therefore \sigma = \sqrt{\frac{٦٤٠٠}{٥٠}} = ١١,٣١$ درجة

ملاحظة هامة :

❶ **إذا كانت جميع المفردات متساوية في القيمة** فإن: الانحراف المعيارى = صفر

❷ **إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات = صفر** فإن: المفردات فى حالة تجانس تام

تمارين (١١)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

① من مقاييس التشتت .... [المدى ، الوسط الحسابي ، المنوال ، الوسيط]

② أبسط وأسهل مقاييس التشتت هو .... [المدى ، الوسط الحسابي ، المنوال ، الوسيط]

③ أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها هو ....
[الانحراف المعياري ، الوسط الحسابي ، المدي ، الوسيط]

④ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من القيم هو ....
[الوسط الحسابي ، المدي ، الانحراف المعياري ، الوسيط]

⑤ المدي للمجموعة القيم: ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ هو .... [٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥]

⑥ المدي للمجموعة القيم: ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ هو .... [٨ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٣]

⑦ المدي للمجموعة القيم: ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ هو .... [صفر ، ٥ ، ١٥ ، ٢٥]

⑧ إذا كانت ٦٧ هي أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدي يساوي ٢٧
فإن: أصغر مفردات هذه المجموعة = ... [٦٧ ، ٤٠ ، ٢٧ ، ٩٤]

⑨ إذا كان مدي القيم: ٢ ، ٧ ، ٦ ، س هو ٨ حيث س > ٠ فإن: س = ...
[٤ ، ١٠ ، ٩ ، −١]

⑩ الانحراف المعياري القيم: ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ هو .... [صفر ، ٣ ، ٤ ، ١٢]

⑪ إذا كانت جميع قيم المفردات متساوية في القيمة فإن ....
[$\overline{س}$ = صفر ، σ = صفر ، س − $\overline{س}$ > صفر ، س − $\overline{س}$ < صفر]

⑫ إذا كان مجـ$(س - \overline{س})^2$ = ٣٦ لمجموعة من عددها يساوي ٩ فإن: σ = ...
[٢ ، ٤ ، ١٨ ، ٢٧]

⑬ مجموع مربعات انحرافات ٩ قيم عن وسطها الحسابي ١٤٤ فإن: σ = ...
[٩ ، ١٦ ، ٤ ، ١٣٥]

⑭ إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي ٢ وعدد هذه القيم ١٠
فإن: مجـ$(س - \overline{س})^2$ = ... [٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠]

٢ تمارين متنوعة :

❶ أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات التالية: ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

❷ احسب الانحراف المعياري لمجموعة القيم: ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤

❸ احسب الانحراف المعياري لمجموعة القيم: ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

❹ احسب الانحراف المعياري لمجموعة القيم: ٣ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٨ ، ٣٠

❺ احسب الانحراف المعياري لمجموعة القيم: ١٥ ، ٣٠ ، ٢١ ، ١٨ ، ١٦

❻ احسب الانحراف المعياري لمجموعة القيم: ٢٠ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ١٨

٧ الجدول التالي يمثل عدد الأطفال لـ ٢٦ أسرة :

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
عدد الأسر	٩	١	٦	٣	٥	٢	٢٦

احسب الانحراف المعياري

---

٨ التوزيع التكراري التالي يوضح عدد الأهداف التي سجلت في عدد من المباريات لكرة القدم :

عدد الأهداف	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد المباريات	١	٤	٦	٩	٥	٣	٢

أولا : احسب الوسط الحسابي **ثانيًا : أوجد الانحراف المعياري لعدد الأهداف**

---

٩ فيما يلي توزيع تكراري يبين أعمار ١٠ أطفال :

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعياري للعمر بالسنوات

---

١٠ الجدول الآتي يوضح التوزيع التكراري لعدد أطفال بعض الأسر في إحدى المدن الجديدة :

العمر بالسنوات	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأطفال	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب (١) **الوسط الحسابي** (٢) **الانحراف المعياري لعدد الأطفال**

---

١١ فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة :

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٦	١٥	٤٠	٢٥	١٠	٤

أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة

---

١٢ الجدول الآتي يبين الأعمار بالسنوات لثلاثين شخص :

العمر بالسنوات	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عدد الأطفال	٢	٣	٥	٥	١١	٤	٣٠

أوجد الانحراف المعياري

---

١٣ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥-٥٥	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

---

١٤ التوزيع التكراري التالي يبين درجات ٢٠ طالبًا في أحد الاختبارات لإحدى المواد الدراسية :

المجموعات	١ -	٣ -	٥ -	٧ -	٩ -	المجموع
التكرار	٢	٦	٨	٤	٢	٢٠

---

١٥ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	صفر -	٤ -	٨ -	١٢ -	١٦ -	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٥	١٠	٥	٤٥

---

١٦ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	٢ -	٤ -	٦ -	٨ -	١٠ -	المجموع
التكرار	٣	١٢	٢١	١٠	٤	٥٠

---

١٧ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	٠ -	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ — ٥٠
التكرار	٢	٣	١٨	٧	١٠